



TITLE:

非定常な自由水面波動に対する数値計算法の開発と浮体との連成運動への応用( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

池末, 俊一

---

CITATION:

池末, 俊一. 非定常な自由水面波動に対する数値計算法の開発と浮体との連成運動への応用. 京都大学, 2007, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2007-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r11957>

RIGHT:



非定常な自由水面波動に対する数値計算法  
の開発と浮体との連成運動への応用

平成18年

池 末 俊 一



# 非定常な自由水面波動に対する数値計算法 の開発と浮体との連成運動への応用

平成18年

池 末 俊 一

## 目次

1	序論	1
2	BEMによる自由表面付流体計算及び浮体との連成計算	9
2. 1	緒言	9
2. 2	基礎式および境界条件	13
2. 3	境界要素法によるラプラス方程式の解法	16
2. 4	自由表面上の変数に関する時間発展手法	20
2. 5	壁面要素と自由表面上要素の交点における処理	23
2. 6	境界要素のラグランジュ移動に伴う問題と平滑化及び再配置手法	25
2. 7	自由表面上のラグランジュ座標移動に関する問題点及び改善手法	32
2. 8	オイラー法による時間発展手法の問題点および陰解法の導入による 計算の安定化	34
2. 9	自由表面上の速度ポテンシャルの時間発展に対する CIP 法の適用	41
2. 10	造波および水槽端部からの反射波防止手法	53
2. 11	浮体との連成計算法	56
2. 12	結言	65
3	提案した計算法に関する種々の検証	69
3. 1	緒言	69
3. 2	移動壁と自由表面の干渉問題による検証	71
3. 2. 1	計算の概要	71
3. 2. 2	微小振幅波領域での計算	73
3. 2. 3	有限振幅波領域での計算	78
3. 3	スロッシングおよびダムブレイク問題による検証	80
3. 3. 1	スロッシング計算による時間発展手法の精度比較	80
3. 3. 2	ダムブレイク計算による自由表面差分手法の比較	87
3. 4	結言	91
4	自由表面付流体—浮体の連成計算手法に関する検証	93
4. 1	緒言	93
4. 2	浮体橋の動揺低減技術に関する検討及び実験結果の概要	94
4. 2. 1	検討の背景及び MS board の概要	94
4. 2. 2	実験の概要	96
4. 2. 3	実験結果	98



4. 3	自由表面付流体—浮体運動連成計算法と実験結果の比較検証	102
4. 4	フィンに対する簡易抗力モデルの浮体運動計算への導入 及び実験との比較	109
4. 5	フィンがヒンジ支持式の場合の計算モデル及び実験との比較	115
4. 6	結言	121
5	自由表面付流体—浮体の連成計算手法に関する特殊形状浮体への適用及び 実験との比較	123
5. 1	緒言	123
5. 2	ツイン型浮防波堤の形状影響に関する計算及び実験との比較	124
5. 3	ツイン型浮防波堤の波高影響及び係留条件に関する計算及び実験との比較	134
5. 4	結言	145
6	結論	147
	謝辞	151

## 1. 序論

沿岸構造物の世界においては、防波堤等の固定構造物の安定性を保証するために、それに作用する波力をいかに適切に評価するかという大命題がある。これは、固定構造物が被災（滑動・転倒等）しないために必要となる構造諸元を決定するための非常に重要な要素であり、従来行われてきた様々な研究は、全てその目的に行き着くといっても過言ではない。

構造物へ作用する波力を評価するにあたって必要となる技術は、大まかにいえば以下に大別される。

- ①所要の再現期間に対応した沖波条件を決定する技術。
- ②沖波が構造物設置点まで進行する際に生じる波浪変形を評価し、設置地点における波高及び周期等の波浪諸元を決定する技術。
- ③構造物設置地点における波高・周期・波向から、作用する波力を算定する技術。

本論文においては、自由表面を有する流体及び浮体との連成問題を主題としている。従って、浮体が波から受ける波力を評価する必要があるという意味で、本論文は「構造物へ作用する波力を決定する技術」に類する内容であるといえる。しかし、構造物自らの運動に起因する流体力も同時に評価しなければならないという意味では、沿岸構造物の分野というよりも船舶工学の分野に近い要素も含まれている。

ところで、沿岸構造物の分野において、設計時における波力評価手法として広く用いられてきた式に合田の波力公式<sup>1)</sup>がある。この公式は、従来別々に考えられてきた重複波の波圧から、砕波の波圧、及び砕波後の波圧を統一的に取り扱ったものである。ただし、この式は固定構造物に作用する最大波力を算定するという機能に特化しており、波力の時刻歴特性を表すものではない。そういった意味では、合田の波力公式は、あくまでも滑動や転倒等を起こさないための設計値を示唆するものであるということに留意しておく必要がある。

これに対し、近年の流れとしては榊山ら<sup>2)</sup>に始まるVOF法の適用や、後藤ら<sup>3)</sup>によるMPS法の適用など、波浪の流体挙動をダイレクトにシミュレートし波力や越波量を評価しようとする動きが活発化している。また、それらの一部は一般の設計計算に導入しようとする動き<sup>4)5)</sup>にもつながっており、一定の成果を挙げている。一方で、これらの手法

と構造物運動の組み合わせについてはほとんど研究が行われておらず、今後の課題として取り上げられている程度である。

浮体に作用する波浪外力と波浪中応答を検討したものとしては、上田ら<sup>6)</sup>による夢洲・舞洲浮体式連絡橋の波浪中弾性応答解析や、瀬戸ら<sup>7)</sup>や渡邊・宇都宮<sup>8)</sup>らによる大規模浮体の弾性応答を考慮した流体との連成問題への取り組み等がビックプロジェクトとして記憶に新しい。ただし、これらの計算手法は、波高・浮体動揺について微小振幅の仮定が成り立つ場合のものであり、浮体規模に対して大波高となる条件下での評価には適さない。

ちなみに、浮体のうち本論文が対象とする「浮棧橋」や「浮防波堤」については非常にマイナーな分野となる。海岸工学論文集データベース(1954～2004)にて「浮防波堤」のキーワードに対応する文献はわずか17件、「浮棧橋」に至っては3件である。

「浮棧橋」や「浮防波堤」などの浮体については、設計条件下での応答特性と消波特性を評価する必要があるが、通常的设计条件では浮体規模（特に吃水）に対して波高の大きさが無視できるほど小さい場合は稀である。特に、要求機能として厳しい波高条件下に設置される浮防波堤については、その傾向が顕著となる。この「浮棧橋」や「浮防波堤」自体について、中村ら<sup>9) 10) 11)</sup>や木暮ら<sup>12) 13)</sup>により種々の検討がなされているものの、大きな波高条件下で必要となる流体－浮体のダイレクトシミュレーションについてはほとんど検討がなされていない。強いて挙げるとすれば、没水型浮防波堤の消波特性をVOF法と浮体運動の連成系で解いた水谷ら<sup>14)</sup>などの研究や、構造物下面への接岸浮遊物の潜込過程をMPS法にて計算した後藤ら<sup>15)</sup>の手法がある。

水谷ら<sup>14)</sup>の手法は、浮体の大振幅動揺や碎波等を含めた流体－浮体の動的相互作用を考慮し、浮防波堤の消波特性を扱った点で新規性がある。ただし、「自由表面と浮体表面は交差しない（没水型のため）」、「浮体の並進運動のみを考慮し、ロールなどの運動は無視する」という限定的な条件下での計算にとどまっており、これが今後の課題といえる。筆者も、3次元傾斜型透過堤<sup>16)</sup>の導水性能を評価する手法としてVOF法による流体解析法を開発した経緯から、構造側の移動境界も扱える計算手法への改良を試みた経験がある。しかし、その試みは頓挫したままである。この原因として、VOF法のような手法では、境界形状の定義が曖昧になってしまう点が挙げられる。特に、浮体が回転運動を行う場合などには、構造物表面における流体の境界条件設定が難しい。また、構造物の移



動が計算セルをまたがる際、流体計算を行うべきセルが新たに発生し、そのセルにおける流動状態を適切に設定する必要が生じることも問題をより複雑にする要因である。結果として、VOF 法のような方法では大きな移動を伴う構造物の周辺流場が非常に曖昧となり、正確な評価が難しいといえる。

一方、後藤ら<sup>15)</sup>の手法は、MPS 法<sup>17)</sup>に浮体運動計算を取り入れたものである。ここに、MPS 法とは流体を計算点となる粒子の集まりとして表現するラグランジュ的手法であり、界面の複雑な挙動を容易に扱うことが出来る点で近年脚光を浴びつつある。後藤らは、この MPS 法における浮体運動計算方法として、まず流体・浮体の区別無く全粒子を流体として運動計算し、その後に浮体を構成する粒子の位置を剛体拘束条件により修正する手法を用いている。この手法は、比較的シンプルな手続きで浮体と流体の連成を考慮でき、碎波・越波等の非線形現象に対しても計算上の特別な取り扱いを必要としない点で、非常に強力な計算手法といえる。ただし、浮体を構成する粒子の運動が、浮体の運動方程式から求められる値でないため、力学的整合性の面で不安が残る。また、流体や浮体が粒子の集まりとして表現されるため、少ない粒子数では境界が不明瞭になる可能性がある。従って、浮体の周辺流場を精度良く表現するための最適な粒子密度についても、今後の検討課題であるといえる。

移動する境界を明瞭かつ適正に扱う手法のひとつとしては、ALE 有限要素法 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method) がある。Nomura ら<sup>18)</sup>は、ばね支持された円柱の渦励振問題に関して ALE 有限要素法による構造流体連成問題の解析を行い、円柱の振動振幅や渦放出周波数について実験結果を良く再現できることを確認している。ただし、有限要素法による計算は流体の内部も要素分割する必要があるため、円柱のような単純な形状でない場合には、計算に使う要素生成自体が非常に大変な作業となる。

そこで、筆者が着目した解法が、BEM をベースとして自由表面と浮体運動の相互作用を時間領域にて直接計算する谷澤ら<sup>19)</sup>の手法である。谷澤らは自由表面及び浮体表面をラグランジュ要素にて構成した境界要素を用い、微小波高・浮体の微小振幅の仮定を外した計算手法の構築を試みている。この計算手法では、BEM を用いることで、流体の運動方程式が理想流体のものに限定されてしまうものの、VOF 法等の手法が持つ境界の曖昧さや、有限要素法がもつ要素生成自体の煩雑さを気にしなくてよいというメリットがある。さらに、境界のみを要素で表現すればよいので、3 次元問題への拡張についても

現状では最も可能性の高い手法であり、谷澤らはその手法についても提案<sup>20)</sup>を行っている。

ところで、この時間領域における浮体表面の圧力を計算する際には、ベルヌーイの圧力方程式における速度ポテンシャルの時間微分値 $\partial\phi/\partial t$ の取り扱いが問題となる。この $\partial\phi/\partial t$ は、周期的定常状態を取り扱う線形計算においては $ae^{i\omega t}$ という関数で表されるが、時間領域における非定常な過程を表す場合にはこのような形式で表現することができない。この時間領域における $\partial\phi/\partial t$ の計算手法については、現在タイムステップと前タイムステップの速度ポテンシャルの差分をとる後進差分の方法が考えられる。この手法は簡便であるため、従来から良く用いられてきたものである。また、波浪強制力の成分は静水圧成分が大きいと尤もらしい計算結果が得られる手法でもある。しかし、この手法では計算精度と安定性の面で問題があるだけでなく、加速度場における浮体との連成が考慮されていないため、運動量保存の観点からも満足な結果が得られにくいといえる。

この時間領域計算における $\partial\phi/\partial t$ に関して、初めて厳密な取り扱いを行ったのは、Vingeら<sup>21)</sup>である。Vingeらは、加速度場をスウェー・ヒープ・ロール及び速度場から生じる求心加速度の4つのモードに分解し、各モードに対する境界値問題を解くことで $\partial\phi/\partial t$ を計算する手法を示した。このVingeらの手法は、それ以前の $\partial\phi/\partial t$ を後進差分により計算する手法に比べ、力学的に整合性のとれたものである。後に、Cointeら<sup>22)</sup>やKangら<sup>23)</sup>は、Vingeらの手法を用いたNWT(Numerical Wave Tank)の構築を行い、種々の検討を行っている。

谷澤ら<sup>19)</sup>は、浮体表面上の幾何学的関係から定まる流体位置ベクトルに厳密な時間微分を施すことで、速度場・加速度場における境界条件式を示している。また、谷澤らは速度場だけでなく加速度場に対応する境界値問題も同時に解く必要性を論じ、加速度ポテンシャルの概念を提案している。この手法では、加速度場の境界条件式から求めた $\partial\phi/\partial t$ に関する境界値問題を解くことで、浮体表面上における $\partial\phi/\partial t$ の値を直接的に計算することができる。また、モードの分解を考えなくてもよい点で、Vingeらの方法に比べて汎用性に優れた手法であるといえる。

Senら<sup>24)</sup>は、セミラグランジュな自由表面要素を用いて、船の非線形動揺を計算する手法を提案している。また、Senらは数値的不安定を発生させる原因が $\partial\phi/\partial t$ を速度ポテンシャルの後進差分で求める手法であることを示し、 $\partial\phi/\partial t$ を求めるには単に速度ポテン

シャルの差分をとるだけでなく、収束計算により次タイムステップにおける力学的整合性を保証する手法を提案している。Cao ら<sup>25)</sup>も同様の手法を用いて NWT の構築を試みている。

本論文は、「浮栈橋」・「浮防波堤」のような浮体の動揺問題について、これら既往の研究成果を参考として自由表面付流体－浮体の時間領域連成計算手法を構築、既往の研究成果や実験等により検証したものである。

まず、2 章においては BEM による自由表面付流体と浮体の連成計算法の概要を整理した。ここに、自由表面の変位が大振幅となる場合、数値計算の不安定化が問題となる。この問題に対しては、自由表面運動の時間発展計算に Newmark- $\beta$  法を導入した独自の手法を提案し、定式化及び計算アルゴリズムを構築した。この手法は、BEM による自由表面挙動の計算について、陽解法の高精度化によるアプローチ<sup>19) 26)</sup>とは異なる陰的解法のスキームを構築したものである。本手法により、自由表面運動だけでなく浮体等との連成問題においても安定した時間発展計算を行うことが出来る。

また、BEM による自由表面付流体の計算では、節点の自由表面接線方向速度計算に速度ポテンシャルの差分計算が必要となる。ただし、自由表面上の速度ポテンシャルに関する時間発展式は移流方程式の形式となっており、中央差分では計算が破綻する場合がある。逆に、1 次風上差分等では、計算の安定性が向上するものの数値粘性の効果により水面波形がなまってしまうこととなる。これに対しては、高精度かつ安定な差分手法として CIP 法を取り上げ、その考え方に基づいた独自の定式化及び計算アルゴリズムを構築した。

流体－浮体の連成を考える際に重要となる  $\partial\phi/\partial t$  の取り扱いについては、谷澤らの加速度ポテンシャルの考え方と、Sen らの収束計算によって力学的整合性を保証する考え方を参考とし、Newmark- $\beta$  法をベースとした収束計算アルゴリズムを構築した。

3 章においては、構築した計算手法の精度について検証を行っている。特に、今回構築した計算手法では移動壁に対する自由表面の応答が重要であるため、ピストン型造波板を模擬した計算条件にて、理論値や実験値との比較検証を行った。また、本論文の計算法における特徴である、「Newmark- $\beta$  法による自由表面運動の時間発展計算」、「CIP 法による自由表面上の接線方向速度計算」については、スロッシング計算や水柱崩壊問題などによる検証を行った。



4 章及び 5 章では、「浮栈橋の動揺低減技術」や「ツイン型浮防波堤」の開発を題材とし、浮体の動揺や消波性能を評価する手法として本論文の計算法の適用を試みた。また、それらに関する実験結果との比較により、本計算法の妥当性について検証を行った。

## 参考文献

- 1) 合田良実(1990)：港湾構造物の耐波設計，波浪工学への序説，増補改訂版，鹿島出版会
- 2) 柿山勉 今井澄雄(1996)：消波護岸の越波に関する数値シミュレーション：海岸工学論文集, vol.43, pp.696-700.
- 3) 後藤仁志 酒井哲郎 沖和哉 芝原知樹(1998)：粒子法による巻き波型碎波を伴う斜面遡上過程の数値シミュレーション：海岸工学論文集, vol.45, pp.181-185.
- 4) 有川太郎 磯部雅彦 高橋重雄(2001)：VOF 法を用いた衝撃碎波圧の計算と適用性：海岸工学論文集, vol.48, pp.831-835.
- 5) (財)沿岸開発技術研究センター(2001)：「数値波動水路(CADMAS-SURF)の研究・開発」～数値波動水路の耐波設計への適用に関する研究会報告書～，沿岸開発技術ライブラリーNo.12, 78p.
- 6) 上田 茂, 瀬戸 秀幸, 熊本 直樹, 井上 幸一, 岡 俊蔵(1997): 浮体橋梁の弾性応答解析法に関する研究, 海洋開発論文集 Vol: 13 巻 : pp.219-224.
- 7) 瀬戸秀幸 (1998): 超大型浮体式構造物における規則波中弾性応答の理論解析 (第 1 報)、日本造船学会論文集、第 184 号、pp.231-241.
- 8) Utsunomiya, T., Watanabe, E. and Eatock Taylor, R. (1998): Wave Response Analysis of a Box-Like VLFS Close to a Breakwater, Proc. 17th Int. Conf. on OMAE, Lisbon, Paper No. OMAE98-4331.
- 9) 中村孝幸 大森禎敏(1994)：浮栈橋を含む港湾域の波高分布の算定法に関する研究：海岸工学論文集, vol.41, pp.971-975.
- 10) 中村孝幸 野村周吾 泉川学文 森田知志(1992)：浮防波堤の平面的な配置法に関する研究：海岸工学論文集, vol.39, pp.531-535.
- 11) 中村孝幸 水谷法美 許東秀 金度三 (2002)：港湾域における浮防波堤の平面配置問題に対する近似解析法について：海岸工学論文集, vol.49, pp.681-685.

- 12) 木暮建一朗 鈴木康正 片桐正彦 八鍬隆(1983) : 浮防波堤の設計と施工 : 海岸工学論文集, vol.30, pp.435-439.
- 13) 木暮建一朗 鈴木康正 溝内俊一 片桐正彦 武井泰男(1983) : 浮防波堤に作用する波漂流力について : 海岸工学論文集, vol.30, pp.440-444.
- 14) 水谷法美 Rhaman, AtaurMd. 許東秀 島袋洋行(2004) : VOF 法による潜水浮体の波浪動揺と波変形に関する有限変位解析手法の開発 : 海岸工学論文集, vol.51, pp.701-705.
- 15) 後藤仁志, 酒井哲郎, 林稔, 安藤伶(2001) : 構造物下面への接岸浮遊物の潜込過程の Lagrange 型シミュレーション : 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp.816-820.
- 16) 池末俊一 熊本直樹 木原一禎 杉泰広 高山知司 池上慎司(2003) : 3 次元傾斜型透過堤の海水交換性能に関する実験と計算 : 海岸工学論文集, vol.50, pp.671-675.
- 17) Koshizuka, S., Tamako, H. and Oka, Y.(1995): A Particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, Computational Fluid Dynamics J., 4, 1995, pp.29-46.
- 18) Nomura. T.(1993) : Finite element analysis of vortex-induced vibrations of bluff cylinders, J.Wind Engrg. Indust. Aerodyn., 46 & 47, 587-594.
- 19) 谷澤克治(1997) : 加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究, 学位論文, 大阪大学, 127p.
- 20) Katsuji Tanizawa and Makiko Minami(2001) : Development of a 3D-NWT for simulation of running ship motions in waves., 16th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, pp.1-4
- 21) Vinje,T. and Brevig,P. (1981) : Nonlinear Ship Motions, Proc. of the 3rd. Int. Conf. on Num. ShipHydro., ppIV-3-1 IV-3-10.
- 22) Cointe,R.,Geyer,P.,King,B.,Molin,B. and Tramonì,M. (1990) : Nonlinear and linear motions of a rectangular barge in perfect fluid, Proc. of the 18th Symp. on Naval Hydro., AnnArbor, Michigan, pp85-98.
- 23) Kang,C.G., and Gong,I.Y. (1990) : A numerical solution method for three-dimensional nonlinear free surface problems, Proc. of the 18th Symp. on Naval Hydro., AnnArbor, Michigan., pp427-438.
- 24) Sen,D., Pawlowski,J.S., Lever,J. and Hinchey,M.J. (1989) : Two-dimensional numerical modeling of large motions of floating bodies in waves, Proc. 5th Int. Conf. Num. Ship Hydro.,

part1, pp257-277.

- 25) Cao,Y.,Beck,R. and Schultz,W.W. (1994) : Nonlinear motions of floating bodies in incident waves,Proc. of 9th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Kuju,Oita, pp33-37.
- 26) Nakayama, T. (1990) : A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free-surface. , Int. J. Numer. Meth. Fluids, 10, pp.683-695



## 2 BEMによる自由表面付流体計算及び浮体との連成計算

### 2. 1 緒言

本論文では非圧縮・非粘性の流体，すなわち完全流体に関する自由表面及び構造物の移動境界問題を扱うこととする。完全流体の速度ポテンシャルはラプラス方程式を満足するため，境界面における境界条件を設定すれば，BEM(Boundary Elemental Method)にて境界面の未知状態を求めることが可能である。

ここで，BEMを用いた流体－浮体(構造)の連成解析手法として，周波数領域の計算法である自由表面グリーン関数法<sup>1)</sup>が挙げられる。この方法では，浮体表面の境界形状のみを境界要素にて規定し，自由表面グリーン関数を用いた境界積分方程式を解くことで浮体表面のポテンシャルを求める。この浮体表面上の速度ポテンシャルより流体圧を計算し，それを積分することで流体力が計算される。また，自由表面グリーン関数は「線形(微小振幅)自由表面条件」、「無限遠放射条件」、「水底面(一定水深もしくは無限水深)での鉛直方向速度ゼロ条件」を満たすような関数であり、その関数形は数多くの文献<sup>2)</sup>にて示されている。

ところで，この自由表面グリーン関数法では線形自由表面の仮定がなされており，図2.1.1のような問題点がある。すなわち，浮体吃水に対して無視できないオーダの入射波高の場合，線形自由表面の仮定と自由表面－構造物表面の幾何学的関係を直接的に表現する非線形な仮定では，浮体を受ける流体圧の表面積が大きく異なってくる。これは，入射

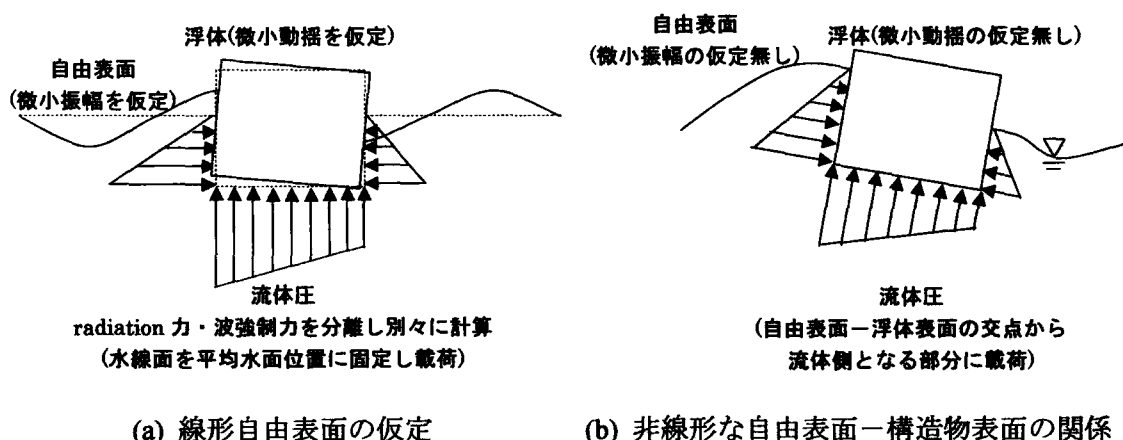


図 2.1.1 線形計算と非線形計算の違いに関するイメージ図

波高が大きくなると、浮体動揺及び動揺に伴い発生する水面波の性状が、線形の仮定と非線形の仮定で異なってくることを意味する。例えば、ある吃水を持つ浮体の前面で、入射波が完全反射し、なおかつ浮体が動揺しないという極端なケースを仮定し、そのときの浮体に作用する水平方向波力について簡易計算した結果を図 2.1.2 に示す。この図より、波高に対して吃水が小さいほど、図 2.1.1 における線形の仮定と非線形の仮定で波力の値に大きな差が生じることがわかる。

図 2.1.2 は極端なケースを想定したものではあるが、想定波高に対して吃水が十分大きいとはいえない浮防波堤や浮桟橋の機能特性（消波・動揺特性等）をより正確に評価するためには、非線形な自由表面－構造物表面の幾何学的関係を直接的に表現する手法が望ましいものと考えられる。

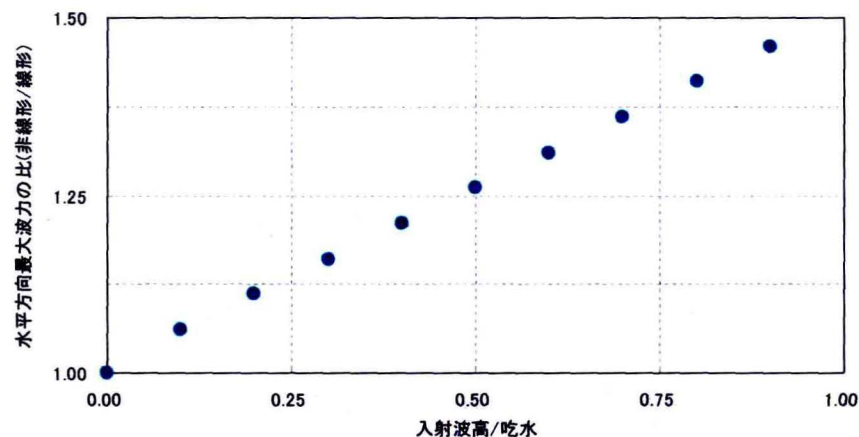


図 2.1.2 自由表面と浮体の幾何学的関係における線形の仮定と非線形の仮定の違い  
(波高/水深 $\ll 1$ , 波高/波長 $\ll 1$ , 入射波が完全反射し浮体動揺無しと想定した場合, 重複波力の理論式で計算)

そこで、本論文では自由表面－構造物表面の関係を直接的に表現する手法として、ラグランジュ要素を用いた BEM による時間領域計算法を扱うこととした。この手法は、自由表面グリーン関数を用いずに、自由表面自体も境界要素として取り扱い、時間発展に従ってラグランジュ的に移動させるものである。この手法は、容器のスロッシング問題<sup>3)</sup>や水槽内の孤立波造波問題<sup>4)</sup>などへの適用が過去行われており、一定の成果を挙げている。

このラグランジュ要素を用いた BEM による自由表面付流体の時刻歴計算については、一般に以下のような計算が行われる。

- (1)現在のタイムステップにおける自由表面の速度ポテンシャル及び構造物表面の法線方向速度を境界条件として設定。
- (2)現在タイムステップでの境界条件及び流体の連続条件（ラプラス方程式）を満たすよ

う、BEMにて節点の自由表面法線方向速度及び壁面上速度ポテンシャルを計算。

(3)要素節点の接線方向速度及び法線方向速度を合成した速度ベクトルにて、要素節点の位置を時間発展させる。

(4)自由表面において、節点の速度ベクトル値及び節点変位によって計算される速度ポテンシャルの時間変化量より、節点の速度ポテンシャルを時間発展させる。

本章では、この一連の計算に関する一般的手法<sup>5)6)</sup>について2.2～2.4に整理した。

一連の時間発展計算においては、自由表面－構造物表面の交点位置が時刻歴で移動していく。交点では、自由表面と構造物表面という異なる未知変数を有する計算点が1点に集約されるため計算上の取り扱いが難しく、計算上の特別な配慮が必要となる。2.5では、この交点における計算手法を示した。

また、計算において、「自由表面が大きな運動をする場合、不安定形状が発展する」、「要素節点のラグランジュ的移動に伴い流体の体積保存性が崩れる」等の懸念がある。2.6～2.7には、これらの懸念に対する対症療法的手法をまとめた。

自由表面の変位が大振幅となる場合、Euler法のような単純な時間発展計算では数値計算の不安定化が問題となる。これは、Euler法が時間発展に関するテイラー展開の1次の項のみしか考慮しておらず、その精度が悪いことに起因する。また、Euler法は現在タイムステップの値を元にして次タイムステップへの変化量が近似的に計算されるため、新たに更新された値が方程式の関係を厳密に満たしているという保証は無い。これは、Euler法だけの問題ではなく、その他の陽解法(高次のテイラー展開を用いる方法やRunge-Kutta法等)全般にもいえることでもある。2.8では、この問題に対して自由表面運動の時間発展計算にNewmark- $\beta$ 法を導入した独自の手法を提案し、定式化及び計算アルゴリズムを構築した。本手法は、自由表面挙動の計算について、陽解法の高精度化によるアプローチとは異なり、次タイムステップにおける方程式の関係を満たすよう時間変化量を決定する陰的解法である。ここでいう方程式とは、自由表面の力学的条件及び流体の連続条件であり、自由表面が大振幅動揺する場合でも、体積保存性を維持しながら計算を安定的に続行することができる。また、本手法によって自由表面運動だけでなく浮体等との連成問題においても、数値的不安定性を発生させることなく計算を行うことができる。

自由表面運動を計算する際の別の問題点として、節点の自由表面接線方向に対する速度計算に、速度ポテンシャルの差分計算が必要となる点が挙げられる。ただし、自由表面上



速度ポテンシャルの時間発展式は移流方程式の形式であり、中央差分では計算が破綻する場合がある。逆に、1次風上差分等では、計算の安定性が向上するものの数値粘性の効果により水面波形がなまってしまうこととなる。この問題に対して、2.9では高精度かつ安定な差分手法としてCIP法<sup>7)</sup>を取り上げ、それを応用した独自の定式化及び計算アルゴリズムを構築した。この手法によって、速度ポテンシャルが発散することなく自由表面運動を安定的に計算できる。

今回開発した計算法を数値造波水槽として用いるためには、自由表面および浮体運動の過渡応答に対する計算領域端からの反射波影響を排除する必要がある。これについては、計算領域端部領域に波減衰領域を設ける「無反射造波と水槽端からの反射波防止手法」を2.10にてまとめている。

浮体の応答を計算する際の浮体表面の変動圧計算については、谷澤ら<sup>8)</sup>の手法を参考として2.11にまとめた。また、本論文では浮体一流体の連成手法として、谷澤らとは異なる収束計算の方法を採用しており、そのアルゴリズムについても2.11に示した。

## 2. 2 基礎式および境界条件

図 2.2.1 のような壁－水面で囲まれた流れ場を考える。この流れ場における流速ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすると、非圧縮性に対する連続の式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2-2-1)$$

ここで、図 2.2.1 における流体を非粘性・非回転流れであるとする。このような流れ場に対しては速度ポテンシャルが存在する。この速度ポテンシャルを  $\phi$  とすると、流速ベクトル  $\mathbf{u}$  に対して、 $\phi$  は以下のように定義される。

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (2-2-2)$$

また、式(2-2-1)と式(2-2-2)から次のラプラス方程式が得られる。

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2-2-3)$$

これが、連続条件を満たすための速度ポテンシャルの基礎式である。

この基礎式に対する境界条件としては、壁面法線方向の流体速度が壁面自身の法線方向速度に等しいという意味の、次式のような壁面境界条件がある。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = V_{wl} \quad (\text{壁面上}) \quad (2-2-4)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は壁の法線方向ベクトル、 $V_{wl}$  は壁の法線方向速度で固定壁の場合は 0 である。

また、自由表面部分では、動力学的条件と運動学的条件から成り立っている。動力学的条件は自由表面における力の釣り合いを保証するものである。ここで、流体の圧力  $p$  は、

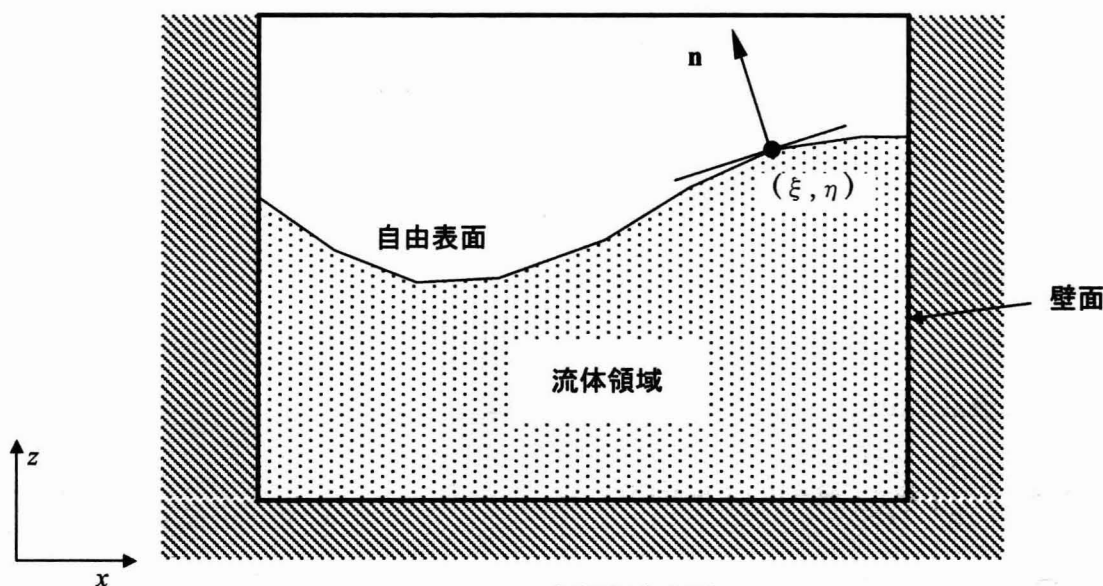


図 2.2.1 解析対象領域

ベルヌーイ式より

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz \right\} \quad (2-2-5)$$

となる。 $\rho$ は流体密度、 $g$ は重力加速度である。また、自由表面上では圧力が大気圧と釣り合わなければならない。よって、大気圧を0で基準化すれば、(2-2-5)式は自由表面上にて以下のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\eta = 0 \quad (2-2-6)$$

ここに、 $\eta$ は自由表面の鉛直変位である。自由表面運動をラグランジュ的に記述する場合、式(2-2-6)に $\phi$ の実質微分

$$\frac{D}{Dt} \phi \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\nabla \phi)^2 \quad (2-2-7)$$

を用いると、式(2-2-6)は次のようになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - g\eta \quad (2-2-8)$$

これが、自由表面上での動力学的条件である。

自由表面における運動学的条件は、ある瞬間に自由表面上に存在していた液体粒子は、次の瞬間にも引き続き自由表面上に存在していることを保証するものである。この条件は、自由表面上の任意点について注目し、その座標を $(\xi, \eta)$ 、速度を $(u, w)$ としたときに、ラグランジュ的表現で以下のように表される。

$$\frac{D\xi}{Dt} = u, \quad \frac{D\eta}{Dt} = w \quad (\text{自由表面上}) \quad (2-2-9)$$

これらをまとめると、完全流体の自由表面流れは、ラプラス方程式に関する非線形の初期値・境界値問題として以下のように定式化される。

#### ・支配微分方程式

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad (\text{全境界内}) \quad (2-2-10)$$

・自由表面条件

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - g\eta \quad (\text{自由表面境界上}) \quad (2-2-11)$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = u, \quad \frac{D\eta}{Dt} = w \quad (\text{自由表面境界上}) \quad (2-2-12)$$

$$\phi = \phi_{fs} \quad (\text{自由表面境界上}) \quad (2-2-13)$$

・壁面境界上

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = V_{wl} \quad (\text{壁面境界上}) \quad (2-2-14)$$

$\phi_{fs}$  は自由表面上の速度ポテンシャルである。

式(2-2-10)～(2-2-14)は、速度ポテンシャルに関するラプラス方程式の境界値問題と、自由表面形状を決定するための連立1階発展型微分方程式の初期値問題とに分けられる。境界値問題は、式(2-2-13)と(2-2-14)を境界条件として式(2-2-10)を解くことになる。また、初期値問題については式(2-2-11)で自由表面上速度ポテンシャルを、式(2-2-12)で液面位置を時間発展させることとなる。

境界値問題に関しては、後述するように境界積分方程式による表現から導出される境界要素方程式を用いて、近似的に壁面上の $\phi$ と、自由表面上の $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$ を未知数とする連立1次方程式を得ることができる。この連立方程式を解く事により、未知数である壁面境界上の速度ポテンシャル $\phi$ 、及び自由表面境界上の法線方向速度 $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$ の近似解が得られる。この得られた近似解を用い、自由表面境界上の諸元(速度ポテンシャル、液面位置)を時間発展させる。これを繰り返すことで自由表面形状の時刻歴変化が計算できる。

## 2. 3 境界要素法によるラプラス方程式の解法

速度ポテンシャルに関するラプラス方程式の境界値問題は、次式の境界積分方程式により解くことができる。

$$\frac{\alpha}{2\pi}\phi(Q) + \int \phi(P) \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(P, Q) d\Gamma(P) = \int \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(P) \psi(P, Q) d\Gamma(P) \quad (2-3-1)$$

ここで、 $\Gamma$ は自由表面境界 $\Gamma_f$ 、壁面境界 $\Gamma_w$ から構成される全境界である。点 $\mathbf{P}=(x_j, z_j)$ は観察点、 $\mathbf{Q}=(x_i, z_i)$ はソース点と呼ばれ、式中の $\partial/\partial(\mathbf{P})$ および $\Gamma(\mathbf{P})$ は、 $\mathbf{P}$ の関数として微分・積分操作を行うものとする。また、 $\Gamma$ は2次元問題の場合には長さ、3次元問題の場合には面積を表し、式中の $\int$ は2次元問題の場合に線積分、3次元問題の場合に面積積分を表す。式(2-3-1)の関数 $\psi(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ はラプラシアンの基本解であり、2次元の場合は以下のよう表される<sup>5)</sup>。

$$\psi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (2-3-2)$$

ここに、 $r$ は $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ の2点間の距離である。また、式(2-3-2)より $\partial\psi/\partial\mathbf{n}$ は次式となる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = -\frac{1}{2\pi r^2} (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} \quad (2-3-3)$$

式(2-3-1)の $\alpha$ はソース点 $\mathbf{Q}$ から境界内部をのぞきこむときの内角に相当するもので、2次元では角点以外の境界上の点で $\pi$ 、境界内の点で $2\pi$ 、境界外の点では0となる。また、任意の角度で交わる場合に、 $\alpha$ は次式で計算できる<sup>6)</sup>。

$$\alpha = -2\pi \int \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) d\Gamma(\mathbf{P}) \quad (2-3-4)$$

上式は、境界内部領域に対してポテンシャル一定、領域への流出入ゼロと仮定した場合の境界積分方程式から得られたものである。

以上述べた方程式を用いて、実際に式(2-3-1)を解くには離散化が必要となる。そこで、対象とする境界を選点法により $N-1$ 個の要素へ分割した際の、境界積分方程式の離散化表現を以下に示す。なお、以下に示す形式は、要素上で変数値が線形的に変化する1次元要素の場合のものである。

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2\pi} \phi_i + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \int_{S_j} (N_{1,j}(\mathbf{x}_p) \phi_j + N_{2,j}(\mathbf{x}_p) \phi_{j+1}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}_p) \right\} \\
= \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \int_{S_j} \left( N_{1,j}(\mathbf{x}_p) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j + N_{2,j}(\mathbf{x}_p) \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{j+1} \right) \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i}) d\Gamma(\mathbf{x}_p) \right\}
\end{aligned} \quad (2-3-5)$$

ここに、 $\mathbf{x}_{Q_i}$  はソース点となる  $i$  番目節点の位置ベクトル、 $\mathbf{x}_p$  は観察点の位置ベクトル、 $S_j$  は  $j$  番目要素の境界領域を表している。 $\phi_j$  は  $j$  番目節点の速度ポテンシャル、 $\partial \phi / \partial \mathbf{n} \Big|_j$  は  $j$  番目節点の法線方向速度である。また、 $j$  番目の要素は  $j$  番目と  $j+1$  番目の節点を結んだ線分で構成されており、 $N_{1,j}$  及び  $N_{2,j}$  は  $j$  要素における  $\phi$  及び  $\partial \phi / \partial \mathbf{n}$  の値が、要素内で線形的に変化する特性を表すための次式のような関数である。

$$N_{1,j}(\mathbf{x}_p) = \frac{|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_p|}{|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j|} \quad N_{2,j}(\mathbf{x}_p) = \frac{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j|} \quad (2-3-6)$$

計算機に適した表現として、式(2-3-5)を行列成分  $H'_{ij}$ ,  $G_{ij}$  を用いたものを書き改めると、

$$\frac{\alpha}{2\pi} \phi_i + \sum_{j=1}^N H'_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j \quad (2-3-7)$$

となる。ここに、 $H'_{ij}$  及び  $G_{ij}$  は次式のようになる。

$$H'_{ij} = \int_{S_j} N_{1,j}(\mathbf{x}_p) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}_p) + \int_{S_{j-1}} N_{2,j-1}(\mathbf{x}_p) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i})}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}_p) \quad (2-3-8)$$

$$G_{ij} = \int_{S_j} N_{1,j}(\mathbf{x}_p) \cdot \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i}) d\Gamma(\mathbf{x}_p) + \int_{S_{j-1}} N_{2,j-1}(\mathbf{x}_p) \cdot \psi(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{Q_i}) d\Gamma(\mathbf{x}_p) \quad (2-3-9)$$

さらに、式(2-3-7)の左辺を  $\phi_j$  についてまとめて表現するため

$$H_{ij} = \frac{\alpha}{2\pi} \delta_{ij} + H'_{ij} \quad (2-3-10)$$

とすれば、式(2-3-7)は最終的に以下のようにまとめられる。

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \cdot \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j \quad (2-3-11)$$

式(2-3-10)の  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ記号であり、以下のように定義されるものである。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (2-3-12)$$

これを行列式により表現する場合には次式となる。

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (2-3-13)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= [H_{ij}] \\ \mathbf{G} &= [G_{ij}] \\ \boldsymbol{\phi} &= \{\phi_j\} \\ \mathbf{q} &= \{q_j\} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j \right\} \\ (i, j &= 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (2-3-14)$$

式(2-3-13)に示された境界積分方程式の離散化表現は、境界要素方程式と呼ばれている。この方程式に基づいて問題の近似解を求めるのが境界要素法(BEM : Boundary Element Equation)である。

この境界要素方程式を用いて、壁-水面で囲まれた流体領域を解くことを考える。まず、壁表面上では、式(2-2-4)に示したように  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$  が既知で  $\phi$  が未知量となる。また、自由表面上(水面上)では動力学条件式(2-2-8)に示したように  $\phi$  の時間増分値が既知量であるため、初期タイムステップの  $\phi$  が分かっているならば各時刻での  $\phi$  を既知量として与えることができる。ただし、自由表面上では  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$  を与える条件式は動力学的条件から導くことは不可であるため、これが自由表面上の未知量として扱われる。ここで、 $N$  個の節点 ( $N-1$  個の境界要素) によって離散化された境界  $\Gamma$  において、自由表面境界  $\Gamma_f$  が  $L$  個の節点、壁表面境界  $\Gamma_b$  が  $(N-L)$  個の節点で構成されているものとする。また、計算に際しては節点の順番を  $i=1\sim L$  までを自由表面境界節点、 $i=L+1\sim N$  までを壁表面境界節点となるよう並べ替える前処理が行われているものとする。このとき、既知量、未知量を整理すると以下のようなになる。

- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_L$  : 既知量 (動力学条件により与えられる自由表面上の速度ポテンシャル)
- $\phi_{L+1}, \phi_{L+2}, \dots, \phi_N$  : 未知量 (壁面表面上の速度ポテンシャル)
- $q_1, q_2, \dots, q_L$  : 未知量 (自由表面上の法線方向速度)
- $q_{L+1}, q_{L+2}, \dots, q_N$  : 既知量 (境界条件より与えられる壁面表面上の法線方向速度)



これを考慮し、式(2-3-13)を未知量及び既知量で分割して表現すると以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_L \\ \phi_{L+1} \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_L \\ q_{L+1} \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (2-3-15)$$

ここで、上式中の行列は以下に示すとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11} &= \begin{pmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{L,1} & \cdots & H_{L,L} \end{pmatrix} & \mathbf{H}_{12} &= \begin{pmatrix} H_{1,L+1} & \cdots & H_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{L,L+1} & \cdots & H_{L,N} \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_{21} &= \begin{pmatrix} H_{L+1,1} & \cdots & H_{L+1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N,1} & \cdots & H_{N,L} \end{pmatrix} & \mathbf{H}_{22} &= \begin{pmatrix} H_{L+1,L+1} & \cdots & H_{L+1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N,L+1} & \cdots & H_{N,N} \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_{11} &= \begin{pmatrix} G_{1,1} & \cdots & G_{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{L,1} & \cdots & G_{L,L} \end{pmatrix} & \mathbf{G}_{12} &= \begin{pmatrix} G_{1,L+1} & \cdots & G_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{L,L+1} & \cdots & G_{L,N} \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_{21} &= \begin{pmatrix} G_{L+1,1} & \cdots & G_{L+1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N,1} & \cdots & G_{N,L} \end{pmatrix} & \mathbf{G}_{22} &= \begin{pmatrix} G_{L+1,L+1} & \cdots & G_{L+1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N,L+1} & \cdots & G_{N,N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

式(2-3-15)を未知数と既知数で分離すると、境界要素方程式は次式の連立 1 次方程式に帰着される。

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (2-3-16)$$

上式中の行列、ベクトルは以下の通りである。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{12} & -\mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{H}_{22} & -\mathbf{G}_{21} \end{pmatrix} : \text{連立 1 次方程式の係数行列}$$

$$\mathbf{X} = [\phi_{L+1}, \dots, \phi_N, q_1, \dots, q_L] : \text{連立 1 次方程式の未知数ベクトル}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ -\mathbf{H}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_L \\ q_{L+1} \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} : \text{連立 1 次方程式の右辺ベクトル}$$

差分法などでは連立 1 次方程式の係数行列  $\mathbf{A}$  がスパース性を有するため SOR 法や共役勾配法などの高速解法が使用できるが、式(2-3-16)の連立 1 次方程式は密行列となるため、ガウスの消去法や LU 分解法などを使用する必要がある。

## 2. 4 自由表面上の変数に関する時間発展手法

式(2-2-11)及び(2-2-12)に示した初期値問題は自由表面の動力学的条件および運動学的条件より導かれたものである。この初期値問題は自由表面上の速度ポテンシャル、および自由表面上の点のラグランジュ座標についての時間変数に関する 1 階微分方程式の形となっている。したがって、自由表面上の変数である速度ポテンシャル  $\phi$ 、自由表面上のラグランジュ座標  $\xi$ 、 $\eta$  の初期値をもとに、既知の値を用いて時間積分を行うことで次タイムステップでのそれらの値を計算することができる。ここで、自由表面上の節点  $i$  に対する時間積分として、最も簡単な陽解法である Euler 法を用いた場合は次式のようにになる。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + dt \cdot \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i^n + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_i^n \right\} - g \eta_i^n \right] \quad (2-4-1)$$

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + dt \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^n \quad (2-4-2)$$

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + dt \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n \quad (2-4-3)$$

上式中の自由表面上の流速すなわち速度ポテンシャルの微分値  $\partial \phi / \partial x \cdot \partial \phi / \partial z$  は、図 2.4.1 に示すように速度ポテンシャルが自由表面上に沿って配置されているため、直方一樣格子の流体解析で用いられるような差分式で単純に求めることができない。ただし、自由表面に対する法線方向の速度ポテンシャル微分値、すなわち法線方向速度  $\partial \phi / \partial n$  は境界値問題に関する連立 1 次方程式(2-3-16)より求められる。また自由表面上に速度ポテンシャル

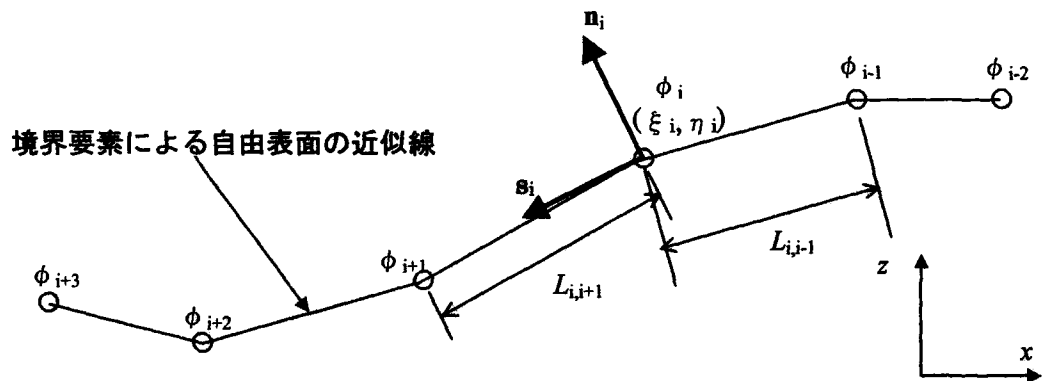


図 2.4.1 自由表面上での変数配置

が配置されていることを利用すれば、自由表面に対する接線方向速度も次式の差分近似により求めることができる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_i = \left( L_{i,j-1} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j+1} + L_{i,j-1}) \quad (2-4-4)$$

ここで、 $L_{ij}$  は自由表面上の節点  $i, j$  間の距離である。これらの自由表面上の法線方向速度  $\partial \phi / \partial \mathbf{n}$  および接線方向速度  $\partial \phi / \partial s$  と、全体座標系との幾何学的関係を用いれば  $\partial \phi / \partial x$ 、 $\partial \phi / \partial z$  は以下のように求めることができる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i \cdot n_{xi} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_i \cdot s_{xi} \quad (2-4-5)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_i \cdot n_{zi} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial s} \right|_i \cdot s_{zi} \quad (2-4-6)$$

$n_{xi}$ ,  $n_{zi}$  は自由表面節点  $i$  における外向き単位法線方向ベクトル  $\mathbf{n}_i$  の  $x, z$  成分,  $s_{xi}$ ,  $s_{zi}$  は自由表面節点  $i$  における単位接線方向ベクトル  $\mathbf{s}_i$  の  $x, z$  成分である。ここで、2次元問題での接線ベクトルを1次の差分近似により計算する場合、以下ようになる。

$$ds_{xi} = \left( L_{i,j-1} \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j+1} + L_{i,j-1}) \quad (2-4-7)$$

$$ds_{zi} = \left( L_{i,j-1} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j+1} + L_{i,j-1}) \quad (2-4-8)$$

から

$$\left. \begin{aligned} s_{xi} &= ds_{xi} / \sqrt{ds_{xi}^2 + ds_{zi}^2} \\ s_{zi} &= ds_{zi} / \sqrt{ds_{xi}^2 + ds_{zi}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-9)$$

また、法線ベクトル  $\mathbf{n}_i$  の  $x, z$  成分である  $n_{xi}$ ,  $n_{zi}$  については以下のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} n_{xi} &= s_{zi} \\ n_{zi} &= -s_{xi} \end{aligned} \right\} \quad (2-4-10)$$

これらの差分近似を用いれば式(2-4-5), (2-4-6)により  $\partial \phi / \partial x \cdot \partial \phi / \partial z$  が求められ、これを式(2-4-1)～(2-4-3)に代入することで自由表面上のラグランジュ座標点における速度ポテンシャル及び座標値を時間発展させることができる。

以上に示した Euler 法による自由表面問題の時刻歴計算法のフローを図 2.4.2 に示す。

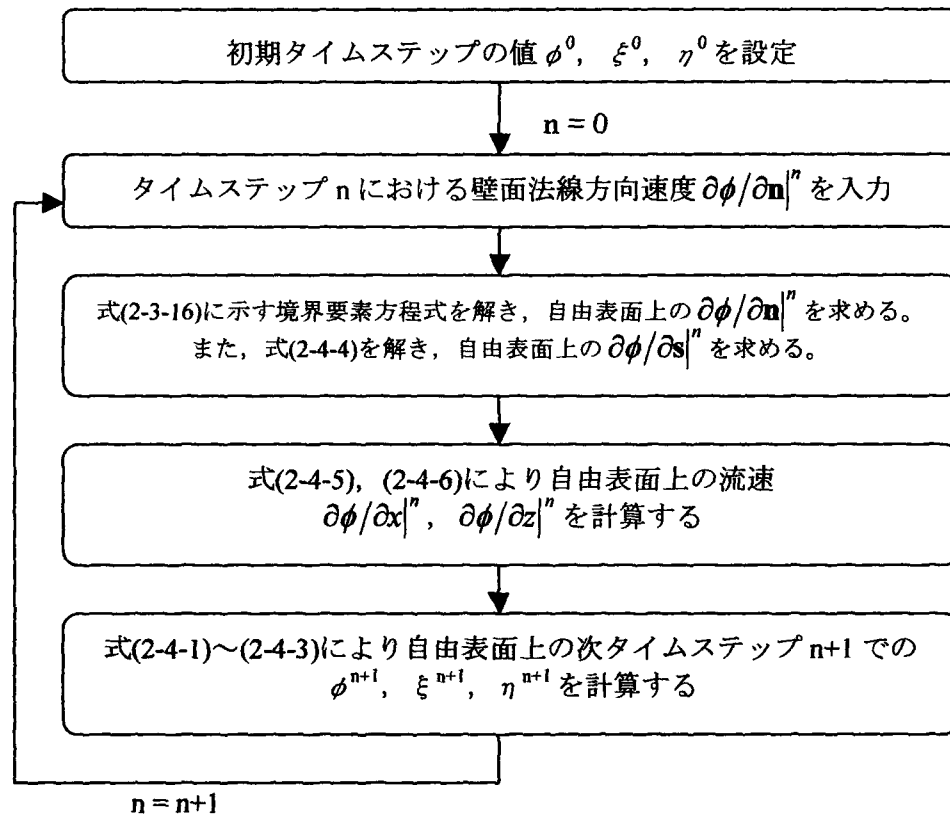


図 2.4.2 Euler 法による自由表面問題の時刻歴計算

## 2. 5 壁面要素と自由表面上要素の交点における処理

2. 3で述べた境界値問題を解く際に問題となるのが、液面と壁面との交点での処理である。2次元の場合で述べれば、図 2.5.1 に示すように交点において2方向に2つの法線ベクトル  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  が存在し、速度ポテンシャルの法線方向微分  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$  の値も  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}_1$ ,  $\partial\phi/\partial\mathbf{n}_2$  の2種類がある。この2つの値を1つの節点で代表させることには無理がある。そこで、図 2.5.2 に示すような2重節点による手法を用いることとする。この2重節点では、要素 A と要素 B の交点部分に、要素 A に所属する節点 a, 要素 B に所属する節点 b を重ねて配置する手法であり、この方法により計算精度が向上する。ただし、この節点においては節点 a と節点 b での  $\phi$  の値が等しくなるという拘束条件が課せられる。

ここで、問題となるのが交点の時刻歴移動に対して節点 a と節点 b の流速値が必ずしも一致しないということである。これを詳細に述べれば、節点 a が自由表面要素に所属し、節点 b が壁面要素に所属する場合、2. 4にて述べたように節点 a, b 上の接線方向速度が境界要素表面上の差分近似により求められるため、互いの要素分割数等により両者の流速値に若干の差異が生ずるということである。この交点における流速値の差異が時間発展とともに誤差として蓄積され、最終的には計算領域を囲う境界要素に隙間が生じ、境界値問題が正確に解けずに計算が破綻してしまう。そこで、各タイムステップ毎に、自由表面側節点 a と壁面側節点 b の流速値  $\partial\phi_a/\partial x$ ,  $\partial\phi_a/\partial z$ ,  $\partial\phi_b/\partial x$ ,  $\partial\phi_b/\partial z$  に以下のような

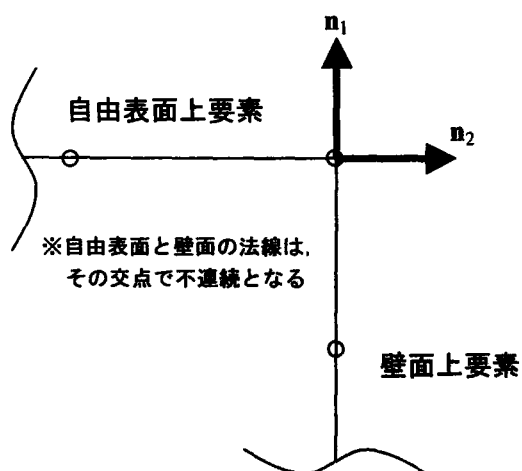


図 2.5.1 角点における要素の法線ベクトル

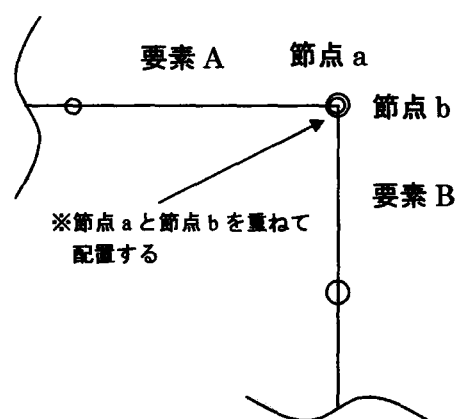


図 2.5.2 2重節点による手法

拘束条件を設けることとする。

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{s}_b} = s_{x,b} \frac{\partial \phi_a}{\partial x} + s_{z,b} \frac{\partial \phi_a}{\partial z} \quad (2-5-1)$$

$$\frac{\partial \phi_b}{\partial \mathbf{n}_b} = n_{x,b} \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + n_{z,b} \frac{\partial \phi_b}{\partial z} \quad (2-5-2)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial x} = \frac{\partial \phi_b}{\partial x} = s_{x,b} \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{s}_b} + n_{x,b} \frac{\partial \phi_b}{\partial \mathbf{n}_b} \quad (2-5-3)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial z} = \frac{\partial \phi_b}{\partial z} = s_{z,b} \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{s}_b} + n_{z,b} \frac{\partial \phi_b}{\partial \mathbf{n}_b} \quad (2-5-4)$$

ここで、 $\partial \phi_a / \partial \mathbf{s}_b$  は自由表面要素上節点 a の流速値を壁面接線方向に投影したものである。同様に、 $\partial \phi_b / \partial \mathbf{n}_b$  は壁面要素上節点 b の流速値を壁面法線方向に投影したものである。また、 $(s_{x,b}, s_{z,b})$  は壁面の接線方向ベクトル、 $(n_{x,b}, n_{z,b})$  は壁面の法線方向ベクトルである。この拘束条件は、交点において自由表面上節点 a が壁面上に沿って動くことを意味している。また、式(2-5-3)、(2-5-4)によって、自由表面上節点 a と壁面表面上節点 b は常に同じ位置をとり、安定して計算を継続することが可能となる。なお、式(2-5-2)では  $\partial \phi_b / \partial \mathbf{n}_b$  を壁面要素上の流速値  $\partial \phi_b / \partial x$ 、 $\partial \phi_b / \partial z$  にて一般的に表現しているが、元々この  $\partial \phi_b / \partial \mathbf{n}_b$  は壁面境界条件として直接的に与えられるものである。従って、 $\partial \phi_b / \partial \mathbf{n}_b$  は交点の壁面法線方向速度として真値であり、誤差はない。逆に、交点の壁面法線方向速度を自由表面上の流速値  $\partial \phi_a / \partial x$ 、 $\partial \phi_a / \partial z$  により計算すると、差分近似により計算された自由表面接線方向の速度成分が混ざるため精度が低下し、壁面形状が交点付近を基点として崩れてしまう。従って、式(2-5-1)～(2-5-4)の形式が計算精度上は好ましいといえる。

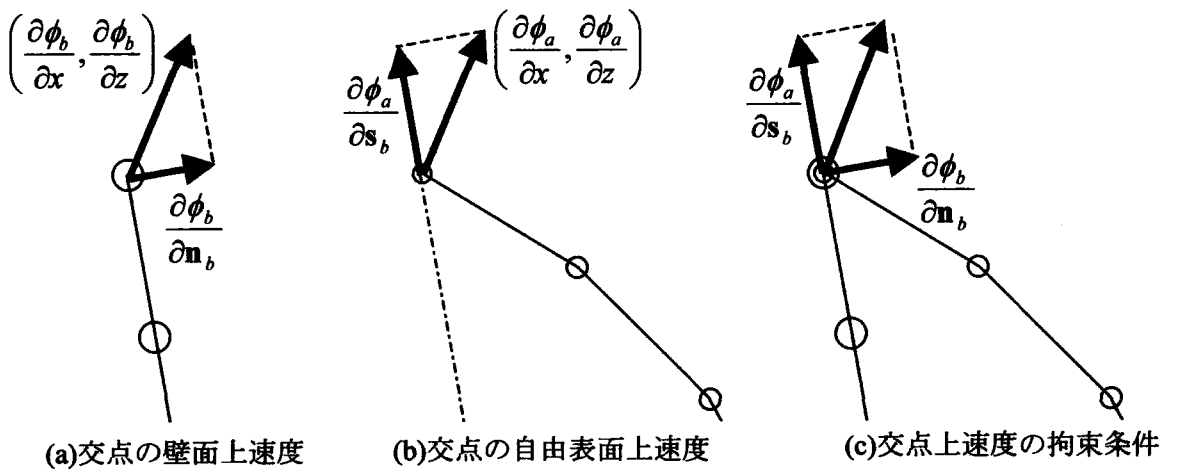


図 2.5.2 自由表面－壁面交点上での速度拘束条件

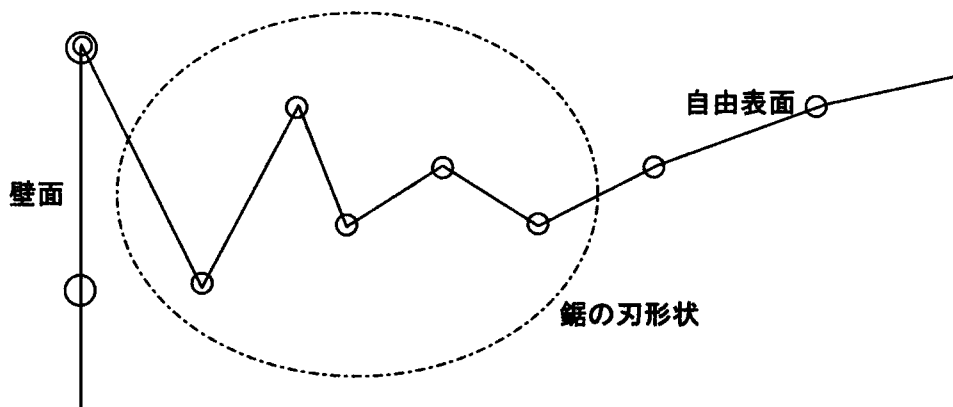
## 2. 6 境界要素節点のラグランジュ移動に伴う問題と平滑化及び再配置手法

自由表面上の境界要素節点をラグランジュ的に移動させる場合、自由表面の形状に”鋸の刃”形状が現れ、計算が不安定化することがある<sup>9)</sup>。そこで、よく用いられる手法として平滑化、および境界要素節点の再配置等の計算技法が挙げられる。以下ではその手法について説明する。

まず、平滑化について説明する。自由表面上の点を移動させて得られる自由表面の形状に、鋸の刃のような形状が現れることがあり、そのために数値計算が不安定化することが知られている。そのような形状を平滑化する手法の一つとして、次のような5点平滑化式<sup>10)</sup>がある。

$$\bar{f}_i = \frac{1}{35}(-3f_{i-2} + 12f_{i-1} + 17f_i + 12f_{i+1} - 3f_{i+2}) \quad (2-6-1)$$

ただし、 $f_i$ は*i*点の数値計算値であり、 $\bar{f}_i$ はその平滑化された値を表すものとする。実際の計算では、 $f_i$ に自由表面上の変数 $\xi_i$ 、 $\eta_i$ 、 $\phi_i$ を代入して、式(2-6-1)により平滑化を行う。ただし、毎時間ステップ毎に平滑化を行うと自由表面形状がなまってしまう、実際よりも自由表面運動を過小評価してしまうことになる。したがって、上記の平滑化は各タイムステップにおいて自由表面形状から鋸の刃形状の度合いを評価し、ある判定値を超える場合に適用するのが適当である。鋸の刃形状の度合いを評価するには様々な手法が考えられるが、ここでは簡単に以下の式を評価基準にする。



※鋸の刃形状は自由表面と壁面の交点から発生することが多い

図 2.6.1 鋸の刃形状のイメージ



$$r_f = \frac{\left| f_i - \frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{2} \right|}{\left| \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} \right|} \quad (2-6-2)$$

式(2-6-2)の $r_f$ は点*i-1*から点*i+1*へ至るまでの変数*f*の平均値と点*i*の*f*値との乖離の度合いを表したもので、この値が大きいほど強い鋸の歯形状が現れていることになる。この $r_f$ がどれぐらいの大きさになったときに平滑化を実行するかは、対象とする問題によりケースバイケースであり、問題により適宜に決定するしかない。また、式(2-6-2)の分母が非常に小さく分子自体の絶対値がある程度小さい場合でも $r_f$ の値が大きくなることが考えられる。この場合には、式(2-6-2)の分子の値に閾値を設け、それ以下である場合には $r_f$ をゼロとする操作をする。こうしなければ、常に平滑化計算が発生してしまうため計算が非効率になることに留意しておく必要がある。

次に、節点の再配置について説明する。ラグランジュ移動を用いる計算では、要素の変形が大きくなり、その形状が複雑になるに従い、節点が集中化ようになる。これは、差分法や有限要素法でもラグランジュ手法を用いている限り生ずる現象で、格子や要素がつぶれてくることを防ぐために、**rezoning**と呼ばれる格子点や節点の再配置を行っている。境界要素法の場合には、節点が集中化するために、境界要素の長さに大きなばらつきが生じ、長さが0に近くなる要素も現れることになる。このため、境界値問題より得られる解の精度が低下したり、数値計算の実行が不可能となることもある。これを防ぐためには境

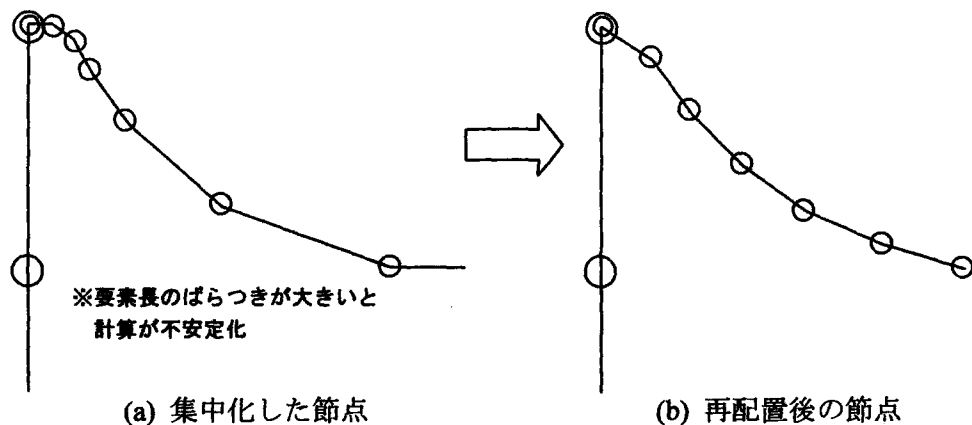


図 2.6.2 節点集中化および再配置のイメージ

界要素上の節点を再配置することが必要であり、これにより境界要素の長さのばらつきを極力抑えることができる。本論文では、境界要素の節点をできるだけ精度良く再配置するための手法として B-スプラインによる曲線補間法<sup>11)</sup>を利用する。まず、B-スプラインによる曲面補間計算法について以下に述べる。

スプライン関数は節点と呼ばれる点と点の間で 1 つの多項式

$$\sum_{i=0}^{K-1} a_i s^i \quad (2-6-3)$$

により表され、異なった節点間にはそれぞれ 1 つの多項式が対応している。また、多項式の結び目である節点では滑らかな性質を持つ。このような関数は区分的多項式関数と呼ばれる。

この種々のスプライン関数を構成するうえで、基礎となるものに B-スプラインがある。B-スプラインという名は、スプライン関数の基底(basis)となっているという意味で、basis(あるいは basic)の頭文字からつけられたものである。ここで、(K-1)次の B-スプラインを節点  $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+K}$  を用いて以下のように定義する。

$$B_{i,K}(s) = (q_{i+K} - q_i) M_K(s; q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+K}) \quad (2-6-4)$$

ここで、 $M_K(s; q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+K})$  は、

$$M_K(s; q) = (q - s)_+^{K-1} \quad (2-6-5)$$

$$(q - s)_+^{K-1} = \begin{cases} 0 & (s < q_i) \\ (q - s)^{K-1} & (s \geq q_i) \end{cases}$$

に対し、 $q_i, q_{i+1}, \dots, q_{i+K}$  の節点で  $q$  に関する  $K$  階の差分商をとったものであり、式(2-6-4)は以下のように表される。

$$B_{i,K}(s) = (-1)^K (q_{i+K} - q_i) \left\{ \frac{(s - q_i)_+^{K-1}}{p_i(q_i)} + \frac{(s - q_{i+1})_+^{K-1}}{p_{i+1}(q_{i+1})} + \dots + \frac{(s - q_{i+K})_+^{K-1}}{p_{i+K}(q_{i+K})} \right\} \quad (2-6-6)$$

ここに、 $p_j(q_j)$  は以下のように定義される式である。

$$p_j(q_j) = (q_j - q_i)(q_j - q_{i+1}) \cdots (q_j - q_{j-1})(q_j - q_{j+1}) \cdots (q_j - q_{i+K}) \quad (2-6-7)$$

ここで、 $K$  を 2 とした場合を例とすると、式(2-6-6)は次式のようにになる。

$$B_{i,2}(s) = (q_{i+2} - q_i) \left\{ \frac{(s - q_i)_+}{(q_i - q_{i+1})(q_i - q_{i+2})} + \frac{(s - q_{i+1})_+}{(q_{i+1} - q_i)(q_{i+1} - q_{i+2})} + \frac{(s - q_{i+2})_+}{(q_{i+2} - q_i)(q_{i+2} - q_{i+1})} \right\} \quad (2-6-8)$$

$$= \frac{(s - q_i)_+}{(q_i - q_{i+1})} - \frac{(s - q_{i+1})_+}{(q_{i+1} - q_i)(q_{i+2} - q_{i+1})} (q_{i+2} - q_i) + \frac{(s - q_{i+2})_+}{(q_{i+2} - q_{i+1})}$$

$s < q_i$  の場合、式(2-6-5)により式(2-6-8)の全項は 0 となり、 $B(s)_{i,2}=0$  となる。 $q_i \leq s < q_{i+1}$  の場合には、式(2-6-8)の右辺第 1 項以外が 0 となるため

$$B_{i,2}(s) = \frac{(s - q_i)}{(q_{i+1} - q_i)} \quad (q_i \leq s < q_{i+1}) \quad (2-6-9)$$

となる。同様に、 $q_{i+1} \leq s < q_{i+2}$  の場合には式(2-6-8)の右辺第 3 項のみが 0 となるため

$$\begin{aligned} B_{i,2}(s) &= \frac{(s - q_i)}{(q_{i+1} - q_i)} - \frac{(s - q_{i+1})}{(q_{i+1} - q_i)(q_{i+2} - q_{i+1})}(q_{i+2} - q_i) \\ &= \frac{q_{i+2}s - q_{i+2}q_i - q_{i+1}s + q_{i+1}q_i - q_{i+2}s + q_{i+2}q_{i+1} + q_i s - q_i q_{i+1}}{(q_{i+1} - q_i)(q_{i+2} - q_{i+1})} = \frac{-(s - q_{i+2})}{(q_{i+2} - q_{i+1})} \end{aligned} \quad (2-6-10)$$

となる。また、 $s > q_{i+2}$  の場合、式(2-6-8)の第 3 項は、第 1 項及び第 2 項の和である式(2-6-10)によって打ち消されるため  $B(s)_{i,2}=0$  となる。これらの関係を図 2.6.3 に示すが、 $B(s)_{i,2}$  は区間  $i \sim i+K$  (この例では  $K=2$ ) の間で 0 でない値を持ち、それ以外の区間では 0 となる。この例のように、B-スプライン関数  $B(s)_{i,K}$  はある区間で局所的に値を有するような性質となっており、区分的多項式関数を構成するのに適しているといえる。

ところで、式(2-6-6)により B-スプラインを直接計算する場合、次数  $K$  の値によっては、有効数字が失われる可能性がある。ドブア・コックスはこの問題を避けるためのコンピュータに適した B-スプライン計算方法として以下の漸化式<sup>11)</sup>を考案している。

$$B_{i,K}(s) = \frac{s - q_i}{q_{i+K-1} - q_i} B_{i,K-1}(s) + \frac{q_{i+K} - s}{q_{i+K} - q_{i+1}} B_{i+1,K-1}(s) \quad (2-6-11)$$

この漸化式の出発点としては、0 次の B-スプライン

$$B_{i,1}(s) = \begin{cases} 1 & (q_i \leq s < q_{i+1}) \\ 0 & (s < q_i, s \geq q_{i+1}) \end{cases} \quad (2-6-12)$$

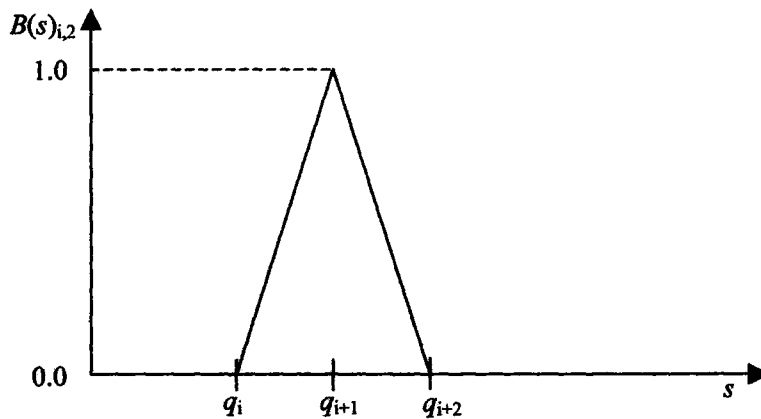


図 2.6.3 B - スプラインの一例( $K=2$  の場合)

を用いればよい。ドブア・コックスの計算法による B-スプラインの計算フローをまとめたものについて図 2.6.4 に示す。このようにして計算される B-スプライン(基底スプライン)を用いて,  $N$  個の既知データ点  $(s_0, f_0), (s_1, f_1), \dots, (s_{N-1}, f_{N-1})$  をとおる  $(K-1)$  次のスプライン関数  $S_K(s)$  について考える場合, スプライン補間関数は以下のように表せる。

$$S_K(s) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i B_{i,K}(s) \quad (2-6-13)$$

ここに,  $\alpha_i$  は B-スプラインの線形結合係数である。スプライン補間関数を構成するにあ

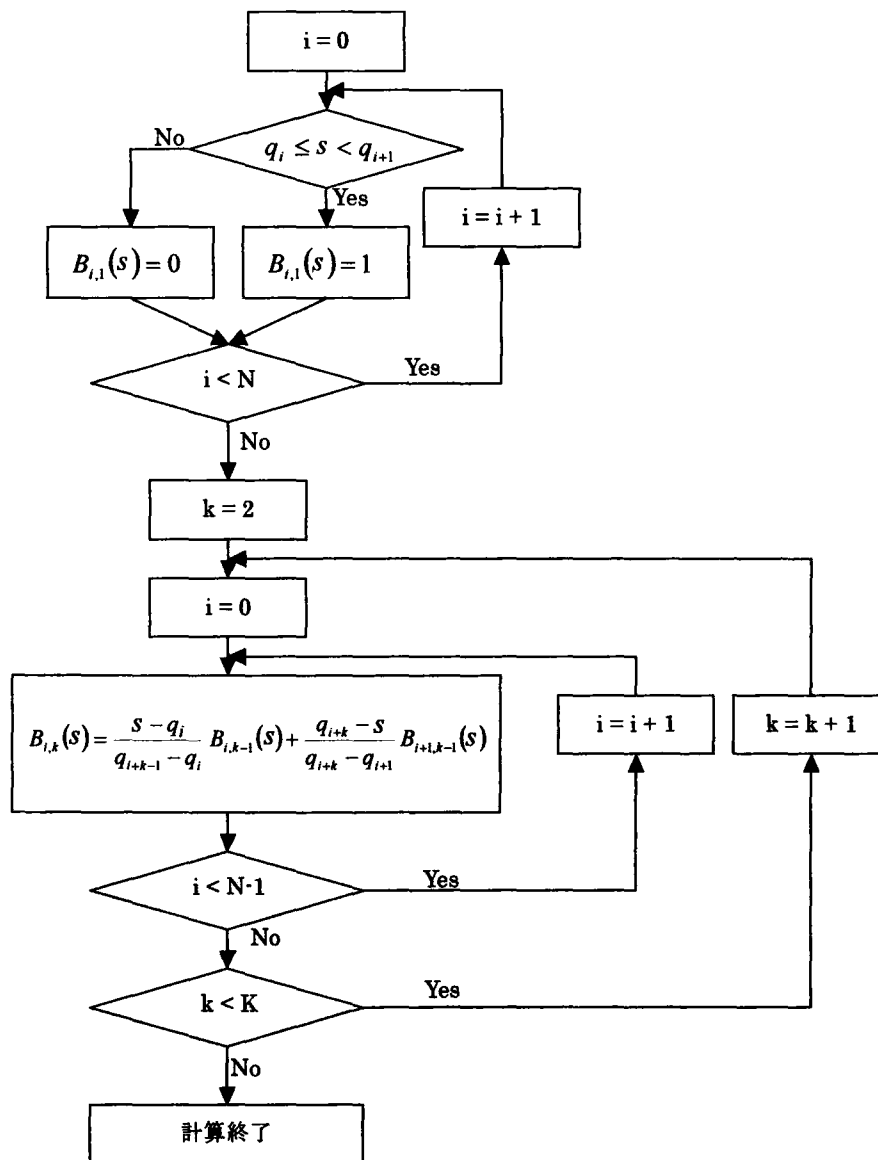


図 2.6.4 ドブア・コックスの計算法による B-スプラインの計算フロー

たり、データ点が与えられた場合の端部条件として以下に示すシェーンバーク・ホイットニの条件がよく使われる。これは、B-スプラインの構成節点  $q_i$  について以下のような条件を設定するものである。

$$\begin{aligned} q_0 &= q_1 = \cdots = q_{K-1} = s_0 \\ q_{i+K} &= (s_i + s_{i+K})/2 \quad (i=0,1,\dots,N-1-K) \\ q_N &= q_{N+1} = \cdots = q_{N+K-1} = s_{N-1} \end{aligned} \quad (2-6-14)$$

ここで、 $q_0, q_1, \dots, q_{K-1}$  および  $q_N, \dots, q_{N+K-1}$  を付加節点、 $q_K, q_{K+1}, \dots, q_{N-1}$  を内部節点とよぶ。ところで、式(2-6-13)中の線形結合係数  $\alpha_i$  は既知のデータ点により定まる未知数である。ここで、スプライン補間関数  $S_K(s)$  がデータ点  $(s_0, f_0), (s_1, f_1), \dots, (s_{N-1}, f_{N-1})$  を必ずとおるという条件より、

$$S_K(s_i) = f_i \quad (i=0,1,\dots,N-1) \quad (2-6-15)$$

が成り立ち、式(2-6-13)に代入することで以下の  $N$  元連立方程式が得られる。

$$\mathbf{A}_s \boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{f}_s \quad (2-6-16)$$

ここで、 $\mathbf{A}_s, \boldsymbol{\alpha}_s, \mathbf{f}_s$  は以下に示すベクトルである。

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} B_{0,K}(s_0) & B_{1,K}(s_0) & \cdots & B_{N-1,K}(s_0) \\ B_{0,K}(s_1) & B_{1,K}(s_1) & \cdots & B_{N-1,K}(s_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,K}(s_{N-1}) & B_{1,K}(s_{N-1}) & \cdots & B_{N-1,K}(s_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (2-6-17)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_s = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_s = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2-6-18)$$

この  $N$  元連立方程式(2-6-16)を解くことにより B-スプラインの線形結合係数  $\alpha_i$  が求まり既知データ点  $(s_0, f_0), (s_1, f_1), \dots, (s_{N-1}, f_{N-1})$  を通るスプライン補間関数が得られる。既知のデータ点数が多い場合であれば、 $\mathbf{A}_s$  は 0 の要素が多い疎な行列(sparse matrix)となるため、SOR 法、共役勾配法などといった連立方程式の解法を用いることができ高速にスプライン補間関数を得ることができる。

次に、この B-スプラインを利用した節点の再配置方法について考える。曲線状に沿った 1 次元座標系を考え、境界要素端点からの線長  $l$  と境界要素上の変数  $f$  の関係を考える場

合、再配置前の既知データ点は境界要素節点上で以下のように与えられる。

$$(l_1, f_1), (l_2, f_2), \dots (l_N, f_N) \quad (2-6-19)$$

ここで、境界要素節点間の曲線長は節点間の距離で十分近似できるものとする、節点  $i$  での  $l_i$  は以下のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= 0 & (i=1) \\ l_i &= \sum_{k=2}^i \sqrt{(\xi_k - \xi_{k-1})^2 + (\eta_k - \eta_{k-1})^2} & (1 < i \leq N) \end{aligned} \right\} \quad (2-6-20)$$

ここに、 $(\xi_i, \eta_i)$  は  $i$  番目要素節点の座標である。式(2-6-19)に示した既知データ点により、先ほど述べた方法にて次式のスプライン補間関数を得ることができる。

$$S_K(l) = f \quad \left( 0 \leq l \leq L_{sum} = \sum_{i=2}^N l_i \right) \quad (2-6-21)$$

この補間関数により、任意の  $l$  に対する  $f$  の値を補間計算できる。従って、再配置後の各節点での  $l'$  の値を与えてやれば、再配置後の変数  $f$  は自動的に求まる。各節点での再配置後の  $l'$  値の与え方には、様々な手法がある。例えば、阿部ら(1996)<sup>12)</sup>は境界値問題に対する残差と初期値問題に対する残差を最小とするような  $l'$  値の与え方を提案している。ただし、それらの計算手法は計算量が大きいため現実的な計算には向かない。従って、ここでは単純に要素長のばらつきを是正し、計算の安定化を図る目的で再配置を行うため、以下のような  $l'$  値の決定手法を用いることとした。

$$l'_i = (i-1) \cdot \frac{\sum_{k=2}^N l_k}{N-1} \quad (2-6-22)$$

これは、再配置後に各節点間の距離を等しくする意味を持つ。再配置後の節点における変数値  $f'_i$  については式(2-6-21)により決定することができる。なお、再配置する際には、節点を持つすべての情報(座標、速度ポテンシャル、流速)を更新する必要がある。

## 2. 7 自由表面上のラグランジュ座標移動に関する問題点および改善手法

式(2-4-7)～(2-4-9)にて求めた接線ベクトルに沿って $(\partial\phi/\partial s)dt$ だけ進む問題を考える。この場合、図 2.7.1 に示すように接線方向移動の表現が 1 次精度であるため実際の自由表面上からずれた位置にラグランジュ座標点が進んでしまう問題が発生する。また、法線方向速度 $\partial\phi/\partial n$ は流体の連続式を満たすよう境界値問題により求められるのに対して、接線方向速度 $\partial\phi/\partial s$ は初期値問題からの時間発展によって計算される速度ポテンシャル $\phi$ の接線方向差分により計算されるため連続条件を満たす保証がない。従って、自由表面上の接線方向移動の精度が低い場合には誤差が蓄積され、流体体積の保存精度等の低下が懸念される。そこで、自由表面上におけるラグランジュ座標の接線方向移動を高精度化するための手法を考案した。まず、式(2-4-7)～(2-4-9)による接線ベクトル計算を以下のように書き改める。ここでは、自由表面に沿った座標系を図 2.7.2 のように考え、ラグランジュ節点  $i$  の接線方向移動量 $(d\xi_i, d\eta_i)$ を 2 次の精度にて表現することを考える。

$$dl_i = dt \left. \frac{\partial\phi}{\partial s} \right|_i \quad (2-7-1)$$

$$d\xi_i = dl_i \left. \frac{\partial\xi}{\partial l} \right|_i + \frac{1}{2!} dl_i^2 \left. \frac{\partial^2\xi}{\partial l^2} \right|_i \quad (2-7-2)$$

$$d\eta_i = dl_i \left. \frac{\partial\eta}{\partial l} \right|_i + \frac{1}{2!} dl_i^2 \left. \frac{\partial^2\eta}{\partial l^2} \right|_i \quad (2-7-3)$$

ここで、隣接したラグランジュ座標点間の距離がその 2 点の間の線長にほぼ等しいと考えれば、上式中の $\xi, \eta$ の 1 階微分及び 2 階微分は以下のように差分近似できる。

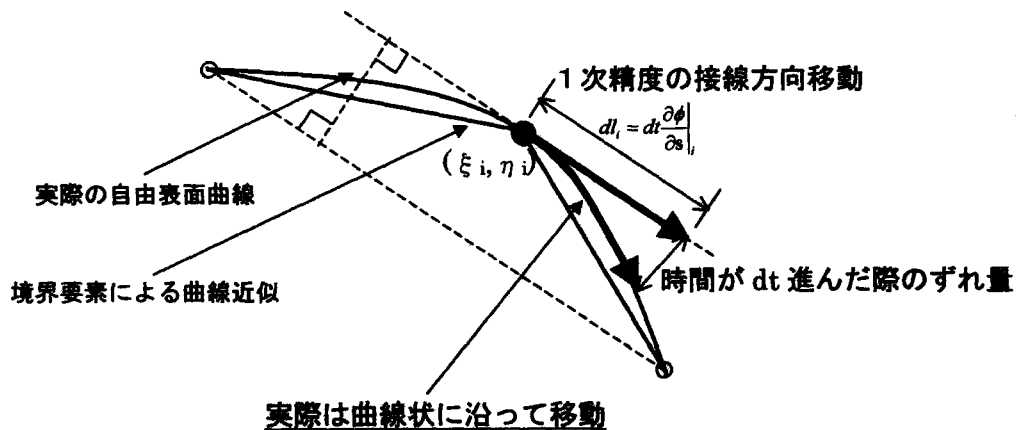


図 2.7.1 自由表面上での変数配置



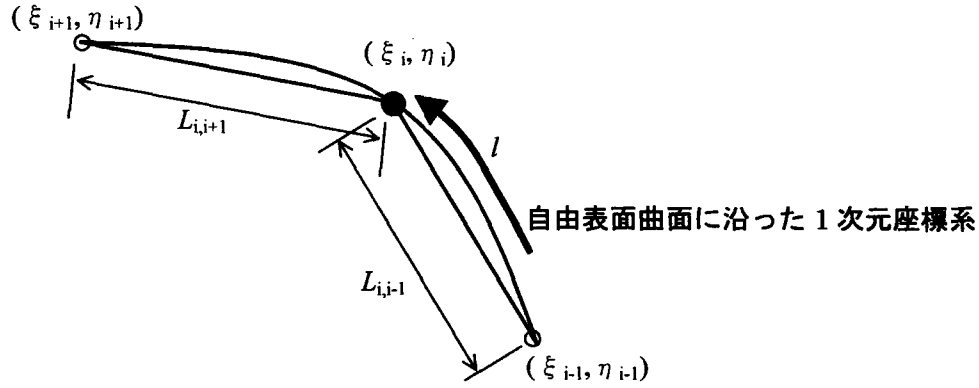


図 2.7.2 自由曲線に沿った 1 次元座標系

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial l} \right|_i = \left( L_{i,j-1} \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j-1} + L_{i,j+1}) \quad (2-7-4)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial l} \right|_i = \left( L_{i,j-1} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j-1} + L_{i,j+1}) \quad (2-7-5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial l^2} \right|_i = \left( \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{L_{i,j+1}} - \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / \left( \frac{L_{i,j-1} + L_{i,j+1}}{2} \right) \quad (2-7-6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial l^2} \right|_i = \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{L_{i,j+1}} - \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / \left( \frac{L_{i,j-1} + L_{i,j+1}}{2} \right) \quad (2-7-7)$$

上式を式(2-7-2), (2-7-3)に代入することで自由表面上におけるラグランジュ節点  $i$  の移動量を 2 次精度にて計算することができる。これを式(2-4-5), (2-4-6)に示すような一般的な表現にて表すことを考えるならば, 式(2-7-1)~(2-7-3)にて求められる  $dl_i$ ,  $d\xi_i$ ,  $d\eta_i$  を用いて単位接線ベクトル  $s_{xi}$ ,  $s_{yi}$  を以下のようにすればよい。

$$\begin{aligned} s_{xi} &= \text{sign}(dl_i) \cdot d\xi_i / \sqrt{d\xi_i^2 + d\eta_i^2} \\ s_{yi} &= \text{sign}(dl_i) \cdot d\eta_i / \sqrt{d\xi_i^2 + d\eta_i^2} \end{aligned} \quad (2-7-8)$$

$\text{sign}(x)$  は  $x$  の正負の符号を表す関数として以下のように定義する。

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases} \quad (2-7-9)$$

## 2. 8 オイラー法による時間発展手法の問題点および陰解法の導入による計算の安定化

2. 4にて述べた時間発展手法では、初期値問題の解法として最も単純な時間積分手法であるオイラー法を用いた。この手法は時間に対して1次精度の陽解法であるため、時刻みを十分に細かくとらなければ誤差が蓄積され計算が不安定になる。この問題に対して、中山ら(1990)<sup>13)</sup>は初期値問題の陽解法において、高精度のスキームを用いるために関数のテイラー展開を利用した方法を提案している。以下にその方法を紹介する。

まず時刻  $t$  において自由表面上で  $(\xi, \eta)$  にあった点が時刻  $t+\Delta t$  には自由表面上の  $(\xi^m, \eta^m)$  に移動し、それに伴いその点の  $\phi$  が  $\phi^m$  に変化したとする。このとき、これらの量  $\xi^m, \eta^m, \phi^m$  はラグランジュ的に時間変数についてテイラー展開すると次の表現となる。

$$\xi^m = \xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \Delta t \frac{D\xi}{Dt}(t) + \frac{1}{2!}(\Delta t)^2 \frac{D^2\xi}{Dt^2}(t) + \dots \quad (2-8-1)$$

$$\eta^m = \eta(t + \Delta t) = \eta(t) + \Delta t \frac{D\eta}{Dt}(t) + \frac{1}{2!}(\Delta t)^2 \frac{D^2\eta}{Dt^2}(t) + \dots \quad (2-8-2)$$

$$\phi^m = \phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \Delta t \frac{D\phi}{Dt}(t) + \frac{1}{2!}(\Delta t)^2 \frac{D^2\phi}{Dt^2}(t) + \dots \quad (2-8-3)$$

上式より、各右辺に含まれる各階のラグランジュ微係数の値を直接計算することができれば、時刻  $t+\Delta t$  における自由表面の位置  $(\xi^m, \eta^m)$  とそこでの速度ポテンシャル  $\phi^m$  とをより正確に知ることができる。

ここで、 $D\xi/Dt = \partial\phi/\partial x$ 、 $D\eta/Dt = \partial\phi/\partial z$  であり、式(2-4-5)～(2-4-6)により計算できる。次に、2階の微分係数については以下のように表される。

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right\} \quad (2-8-4)$$

$$\frac{D^2\eta}{Dt^2} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial\phi}{\partial x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right\} \quad (2-8-5)$$

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{D\phi}{Dt} \right) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \frac{D^2\eta}{Dt^2} - g \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (2-8-6)$$

上式中の右辺第1項には  $\partial\phi/\partial t$  が含まれるが、連続式より導かれるラプラス方程式(2-2-10)

の両辺を時間微分することで以下のような $\partial\phi/\partial t$ に関する支配微分方程式を得ることができる。

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (2-8-7)$$

また、自由表面上では動力的条件式(2-2-11)より $\partial\phi/\partial t$ の境界条件が以下のように表される。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - g\eta \quad (2-8-8)$$

壁面上での境界条件についても同様に式(2-2-14)の両辺を時間微分すれば以下になる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial V_{wl}}{\partial t} \quad (2-8-9)$$

これらの支配微分方程式および境界条件を用いれば、 $\phi$ と同様に $\partial\phi/\partial t$ についても2.2で述べた境界要素法を適用することで解くことができる。これによって自由表面上の $\partial(\partial\phi/\partial t)/\partial \mathbf{n}$ と $\partial(\partial\phi/\partial t)/\partial \mathbf{s}$ を求めることができる。また、式(2-4-5)～(2-4-6)と同様の手法を用いれば式(2-8-4)～(2-8-5)中の $\partial(\partial\phi/\partial t)/\partial x$ ,  $\partial(\partial\phi/\partial t)/\partial z$ は以下のように計算できる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{s}_x \quad (2-8-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}_z + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{s}_z \quad (2-8-10)$$

また、式(2-8-4)～(2-8-5)中の $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial x$ ,  $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial z$ ,  $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial x$ ,  $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial z$ についても同様に計算できる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{s}_x \quad (2-8-11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{n}_z + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{s}_z \quad (2-8-12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{s}_x \quad (2-8-13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{n}_z + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{s}_z \quad (2-8-14)$$

この式(2-8-11)～(2-8-14)における $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial \mathbf{s}$ 、 $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial \mathbf{s}$ については、式(2-4-4)と同じ要領で接線方向の差分近似により計算可能である。しかし、 $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial \mathbf{n}$ 、 $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial \mathbf{n}$ については計算が難しい。最も直接的な手法を考えれば、境界要素方程式を用いて節点近傍の流体側内部点における速度ポテンシャル値を何点か計算することで差分的に求めることは可能である。しかし、この手法では内部点のポテンシャル計算において境界要素上の全点を参照する計算となり計算効率が悪い。また、内部点の位置により求める値が大きく変化して数値的に収束せず、正しい解が得られがたい。この他にも、 $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial x$ 、 $\partial(\partial\phi/\partial x)/\partial z$ 、 $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial x$ 、 $\partial(\partial\phi/\partial z)/\partial z$ を境界要素方程式の $x, z$ に関する直接微分より計算する方法もあるが、この方法でも結局は先ほど述べた境界要素上の全点を参照し計算を行わなければならない。従って、式(2-8-1)～(2-8-14)で述べた中山らの方法は計算時間と計算精度とでトレードオフの関係にあり、時間刻みを大きくできる反面、計算時間が多くかかってしまうという問題がある。

陽解法での高精度化を試みた別の例としては、谷澤ら<sup>8)</sup>が提案した4次精度ルンゲクッタ法を用いる手法が挙げられる。4次精度のルンゲクッタ法は以下のように時間発展を行う陽的な計算法である。

$$f(t_i) = f(t_{i-1}) + \frac{dt}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2-8-15)$$

$$k_1 = \frac{Df}{Dt} (t_{i-1}, f(t_{i-1})) \quad (2-8-16)$$

$$k_2 = \frac{Df}{Dt} \left( t_{i-1} + \frac{dt}{2}, f(t_{i-1}) + \frac{dt}{2} k_1 \right) \quad (2-8-17)$$

$$k_3 = \frac{Df}{Dt} \left( t_{i-1} + \frac{dt}{2}, f(t_{i-1}) + \frac{dt}{2} k_2 \right) \quad (2-8-18)$$

$$k_4 = \frac{Df}{Dt} (t_{i-1} + dt, f(t_{i-1}) + dt \cdot k_3) \quad (2-8-19)$$

以上に示すように4次のルンゲクッタ法では、1タイムステップを進めるために4段階の計算を行わなければならない。また、各段階では境界値問題・初期値問題を解く必要があ

るだけでなく、各段階での計算結果を保存する必要があり計算プログラムも非常に煩雑となる。また、この手法では計算時間と計算精度のトレードオフが大きいだけでなく、構造物運動を解くサブルーチンとの連成を考慮する場合にも、各段階についての処理に関する煩雑な手続きが必要となるという欠点がある。

そこで、この時間発展計算の安定化について、上記で述べたような陽解法の高精度化によるアプローチではなく、陰解法によるアプローチからの改善を試みる。これは、次タイムステップにおける方程式の関係をも満たすよう時間変化量を決定する手法であり、後述する浮体との連成を考慮する場合でも、計算安定性や利便性の面で利点がある。

ここで、陰的な時間積分手法については線形加速度法や Newmark- $\beta$  法<sup>14)</sup>、Wilson の  $\theta$  法<sup>15)</sup>などがある。ここでは、線形加速度法を一般化した表現で記述される Newmark- $\beta$  法を用いた解法について述べる。Newmark- $\beta$  法はある変数  $f$  に対して次式により時間発展を行う手法である。

$$\left. \frac{Df}{Dt} \right|^{n+1} = \left. \frac{Df}{Dt} \right|^n + dt \left\{ \alpha \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^{n+1} + (1-\alpha) \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^n \right\} \quad (2-8-20)$$

$$f^{n+1} = f^n + dt \left. \frac{Df}{Dt} \right|^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^{n+1} + (1-2\beta) \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^n \right\} \quad (2-8-21)$$

$\alpha$  は通常は  $1/2$  の値をとる。これは、速度変化が次タイムステップの加速度と現在のタイムステップの加速度平均値をとることを示している。また、 $\beta$  については  $0 \leq \beta \leq 1/2$  の値をとる。ここで、 $\beta$  の値により時間積分の特性が以下のように特徴付けられる。

まず、 $\beta$  が  $0$  の場合、

$$\beta = 0 \quad f^{n+1} = f^n + dt \left. \frac{Df}{Dt} \right|^n + \frac{1}{2} dt^2 \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^n \quad (2-8-22)$$

となり右辺項が現在のタイムステップのみで構成されるため陽解法的な特性となる。次に、 $\beta$  が  $1/2$  の場合は、

$$\beta = \frac{1}{2} \quad f^{n+1} = f^n + dt \left. \frac{Df}{Dt} \right|^n + \frac{1}{2} dt^2 \left. \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|^{n+1} \quad (2-8-23)$$

となり右辺の時間に対する  $2$  次の項が次タイムステップのみで構成され陰解法的特性となる。このように、Newmark- $\beta$  法では変数の時間発展において、次タイムステップにおける変数  $f$  の時間  $2$  階微分値の寄与度が  $\beta$  にて表現される。ちなみに、 $\beta$  を  $1/4$  とすると

$$\beta = \frac{1}{4} \quad f^{n+1} = f^n + dt \left. \frac{Df}{Dt} \right|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left( \left. \frac{1}{2} \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|_i^{n+1} + \left. \frac{1}{2} \frac{D^2 f}{Dt^2} \right|_i^n \right) \quad (2-8-24)$$

となり、陰解法と陽解法の両方の特性を有する。 $\beta=1/4$ を用いる場合は、無条件安定といわれ、Newmark- $\beta$ 法を用いた非線形構造動解析<sup>16)</sup>などではこの値が良く用いられている。

この、Newmark- $\beta$ 法を自由表面付き流体解析へ適用することを考える。解析において、時間発展される変数はラグランジュ座標点 $(\xi, \eta)$ と自由表面上の速度ポテンシャル $\phi$ である。まず、自由表面上の節点 $i$ に関する座標点の時間発展を、Newmark- $\beta$ 法にて表現すると以下ようになる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^{n+1} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^n + dt \left\{ \alpha \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^{n+1} + (1-\alpha) \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^n \right\} \quad (2-8-25)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^{n+1} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n + dt \left\{ \alpha \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_i^{n+1} + (1-\alpha) \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_i^n \right\} \quad (2-8-26)$$

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + dt \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^{n+1} + (1-2\beta) \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^n \right\} \quad (2-8-27)$$

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + dt \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_i^{n+1} + (1-2\beta) \left. \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_i^n \right\} \quad (2-8-28)$$

また、速度ポテンシャルについても同様にして以下のような式が得られる。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + dt \left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \left. \frac{D^2 \phi}{Dt^2} \right|_i^{n+1} + (1-2\beta) \left. \frac{D^2 \phi}{Dt^2} \right|_i^n \right\} \quad (2-8-29)$$

ただし、速度ポテンシャルの時間変化量に関する1次の項、2次の項は式(2-2-8)、(2-2-9)より以下のように表される。

$$\left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_i^n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^n \right)^2 + \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n \right)^2 \right\} - g\eta_i^n \quad (2-8-30)$$

$$\left. \frac{D^2 \phi}{Dt^2} \right|_i^n = \frac{D}{Dt} \left( \left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_i^n \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \left|_i^n \cdot \frac{D}{Dt} \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^n \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left|_i^n \cdot \frac{D}{Dt} \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n \right) - g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_i^n \quad (2-8-31)$$

これらの式(2-8-25)～(2-8-31)を解く際に問題となるのは、時間発展式の右辺に次タイムステップ $n+1$ における、各変数の時間に関する微分項が含まれている点である。よって、これらを解く際には、次タイムステップにおける値に対して仮値を与え、その値を初期値と

して収束計算を行う必要がある。以下にその具体的な手順を示す。

まず、自由表面上の次タイムステップにおける速度ポテンシャルとして、仮値  $\phi'$  を定義する。収束計算の初期ステップにおいては、この仮値に既知である現在タイムステップでの速度ポテンシャル値を代入する。また、壁面の法線方向速度については強制加振の場合、 $\partial\phi/\partial n|^{n+1}$  を一義的に与えることが出来る。この速度ポテンシャルの仮値  $\phi'$  および壁面の次タイムステップにおける壁面法線方向速度  $\partial\phi/\partial n|^{n+1}$  を境界条件として境界値問題を解くことにより、自由表面上法線方向速度の次タイムステップにおける仮値  $\partial\phi'/\partial n$  を求めることができる。この自由表面上の仮値  $\phi'$ 、 $\partial\phi'/\partial n$  を式(2-4-5), (2-4-6)に代入することにより、自由表面上での次タイムステップにおける流速の仮値  $\partial\phi'/\partial x$ ,  $\partial\phi'/\partial z$  が計算できる。この流速の仮値と式(2-8-25), (2-8-26)より次式を得ることができる。

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)_i = \frac{2}{dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}_i - \frac{\partial\phi}{\partial x}_i^n\right) - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (2-8-32)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)_i = \frac{2}{dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}_i - \frac{\partial\phi}{\partial z}_i^n\right) - \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_i^n \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (2-8-33)$$

式(2-8-32), (2-8-33)を式(2-8-27), (2-8-28)に代入することで自由表面節点  $i$  の次タイムステップにおける仮のラグランジュ座標点  $(\xi'_i, \eta'_i)$  は以下ようになる。

$$\xi'_i = \xi_i^n + dt \frac{\partial\phi}{\partial x}_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)_i + (1-2\beta) \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n \right\} \quad (2-8-34)$$

$$\eta'_i = \eta_i^n + dt \frac{\partial\phi}{\partial z}_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)_i + (1-2\beta) \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_i^n \right\} \quad (2-8-35)$$

また、自由表面上の速度ポテンシャル更新値  $\phi''$  は、式(2-8-30), (2-8-31)を用いることで以下のように計算できる。

$$\phi''_i = \phi_i^n + dt \frac{D\phi}{Dt}_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D^2\phi'}{Dt^2}_i + (1-2\beta) \frac{D^2\phi}{Dt^2}_i^n \right\} \quad (2-8-36)$$

$$\frac{D^2\phi'}{Dt^2}_i = \frac{D}{Dt}\left(\frac{D\phi'}{Dt}\right)_i = \frac{\partial\phi'}{\partial x}_i \cdot \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x}\right)_i + \frac{\partial\phi'}{\partial y}_i \cdot \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)_i + \frac{\partial\phi'}{\partial z}_i \cdot \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\right)_i - g \frac{\partial\phi'}{\partial z}_i \quad (2-8-37)$$

式(2-8-36)で得られた  $\phi''$  を、次収束計算ステップの  $\phi'$  に代入し一連の計算を繰り返す。収束計算を繰り返すと  $\phi'$ ,  $\phi''$  の値がほぼ等しくなるため、そこで収束計算を終了して、求めた仮値  $\phi'$  を次タイムステップの値  $\phi^{n+1}$  として使用する。



以上に述べた, Newmark- $\beta$  法による時間積分手法を用いた自由表面付き流体解析については文章だけでは分かりづらい面もあるため, 簡単のために計算フローを図 2.8.1 に示す。

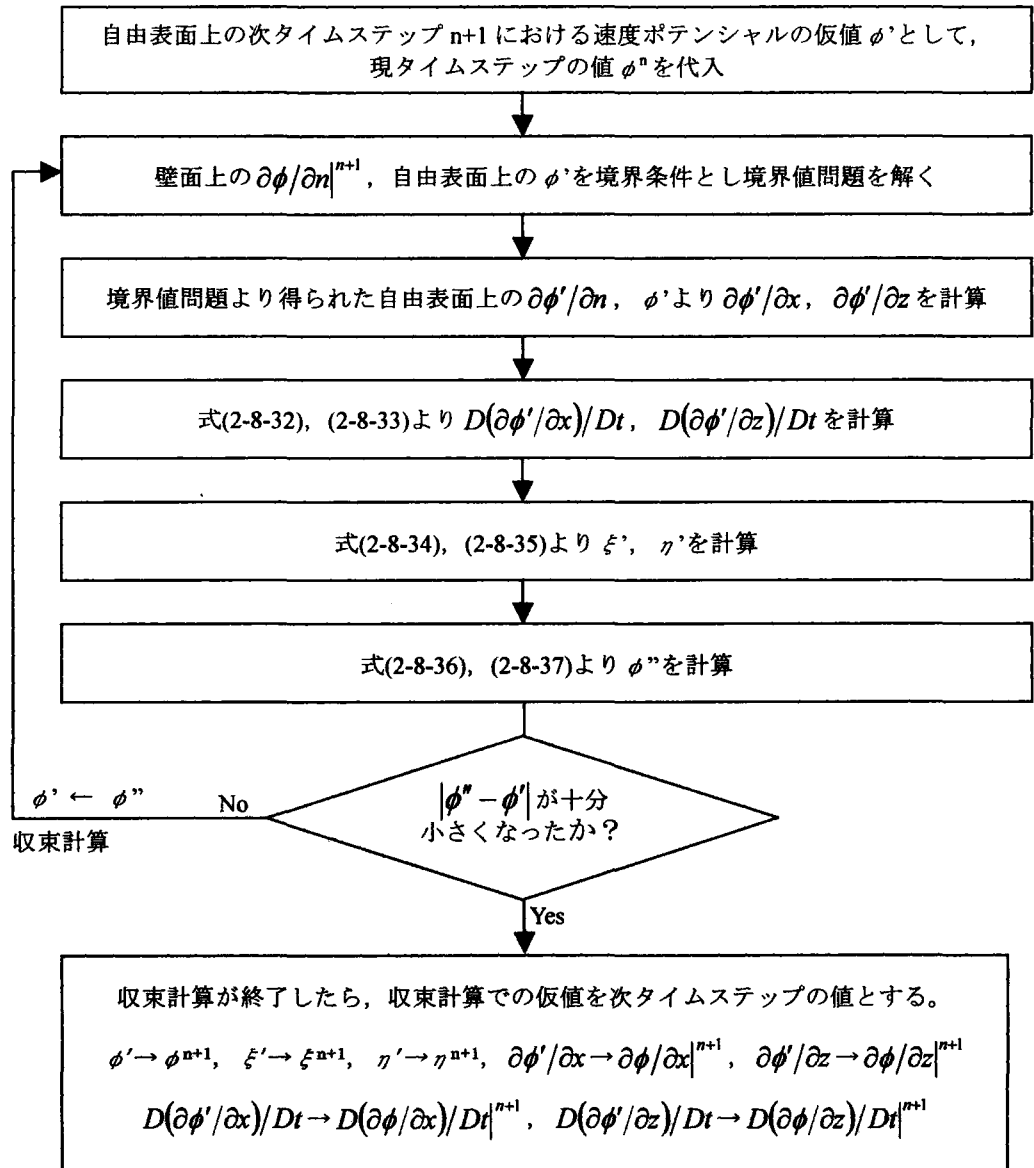


図 2.8.1 Newmark- $\beta$  法による自由表面上変数の時間積分

## 2. 9 自由表面上の速度ポテンシャルの時間発展に対する CIP 法の適用

ところで、今までに述べてきた速度ポテンシャルの時間増分値は以下の形式であった。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - g\eta \quad (2-9-1)$$

ここで、自由表面の接線・法線方向座標系と  $x$ - $z$  座標系において速度ポテンシャルの微分値は以下の関係にある。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_x + \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{s}_x \quad (2-9-2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_z + \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{s}_z \quad (2-9-3)$$

式(2-9-2), (2-9-3)を式(2-9-1)に代入すると、式(2-9-1)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - g\eta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_x + \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{s}_x \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_z + \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{s}_z \right)^2 \right\} - g\eta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 (\mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_z^2) + 2 \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{n}_x \mathbf{s}_x + \mathbf{n}_z \mathbf{s}_z) + \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 (\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_z^2) \right\} - g\eta \end{aligned} \quad (2-9-4)$$

上式の  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_z$ ,  $\mathbf{s}_x$ ,  $\mathbf{s}_z$  は自由表面の法線・接線方向の単位ベクトルであり、

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{n}| &= \mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_z^2 = 1 \\ |\mathbf{s}| &= \mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_z^2 = 1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} &= \mathbf{n}_x \mathbf{s}_x + \mathbf{n}_z \mathbf{s}_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9-5)$$

の関係にある。これを、式(2-9-4)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right\} - g\eta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \right\} - g\eta \end{aligned} \quad (2-9-6)$$

となる。従って、自由表面上の速度ポテンシャルの時間増分値は、自由表面の接線方向

成分  $\mathbf{s}$  および法線方向成分  $\mathbf{n}$  を用いて次式のように表すことができる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 \right\} - g\eta \quad (2-9-7)$$

ここで、式(2-9-7)は2. 1で説明したように以下のベルヌーイ式および速度ポテンシャル  $\phi$  の実質導関数より導出されたものと解釈することができる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (2-9-8)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{s}} + \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \right) \phi \quad (2-9-9)$$

式(2-9-7)を導出するこの2式より気付く点は、速度ポテンシャルの実質導関数が速度ポテンシャルの時間偏微分項および接線・法線方向の移流項を含んでいることである。従って、式(2-9-9)の移流部分を考慮して式(2-9-7)を書き改めると以下のようになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} + \left( -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right) \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 - g\eta \quad (2-9-10)$$

この式の左辺第2項に着目すれば、この項は速度ポテンシャルが速度  $-(\partial\phi/\partial\mathbf{s})$  にて接線方向に移流されることを示している。本来ならば法線方向の成分についても同様のことが言えるのだが、この項に使用される変数は差分ではなく境界値問題より直接的に求められるものであるため数値計算上は右辺の第1項と性質が異なるものである。したがって、式(2-9-10)において、左辺第2項を移流速度が  $-(\partial\phi/\partial\mathbf{s})$  となる移流項、右辺を非移流項として取り扱うこととし以下のように書き改めることにする。

$$\frac{D\phi}{Dt} + U \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} = G \quad (2-9-11)$$

$$\begin{cases} U = -\left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right) \\ G = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{s}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 - g\eta \end{cases}$$

式(2-9-11)のような形式にすると、速度ポテンシャルの時間増分値に関する方程式は、速度ポテンシャルの接線方向に関する移流方程式に、非移流項が付加されたものであることが分かる。

この移流方程式について問題となるのが、空間 1 階微分項の取り扱いである。そこで、この移流方程式の安定性について、次式のような 1 次元の基本問題を考えることとする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2-9-12)$$

ここに、数値計算上の差分については簡単のため図 2.9.1 のような等間隔メッシュを考える。この条件下で考える最も簡単な差分手法は以下に示す中心差分を用いる方法である。

$$f^{n+1}_i = f^n_i - \Delta t \cdot u \frac{f^n_{i+1} - f^n_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2-9-13)$$

この手法で矩形波を移流させた場合のテスト計算結果を図 2.9.2 に示す。中心差分では、矩形波の進行方向側は比較的滑らかであるが、後方に激しい振動を生じていることが分かる。中心差分では、位置  $i$  での空間 1 階差分に、その前後位置  $i+1, i-1$  の値のみを使用し、中心点  $i$  を 1 つ飛ばした 2 点間の差分となっている。これが中心差分の数値的不安定性の原因である。この、移流に伴う数値的不安定性を排除し、安定的に計算を進めるための手

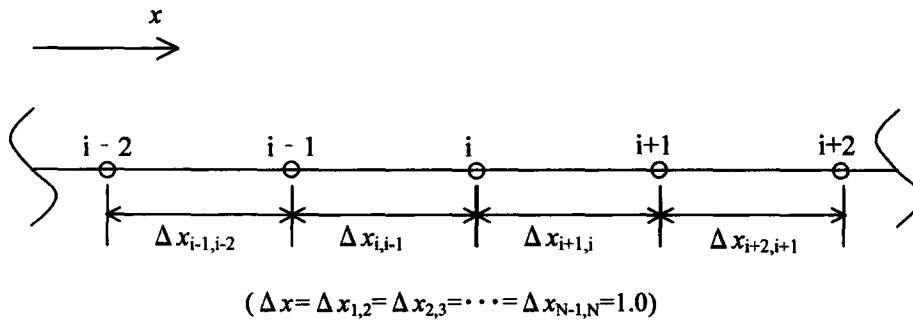


図 2.9.1 移流問題テスト計算に用いる 1 次元格子系

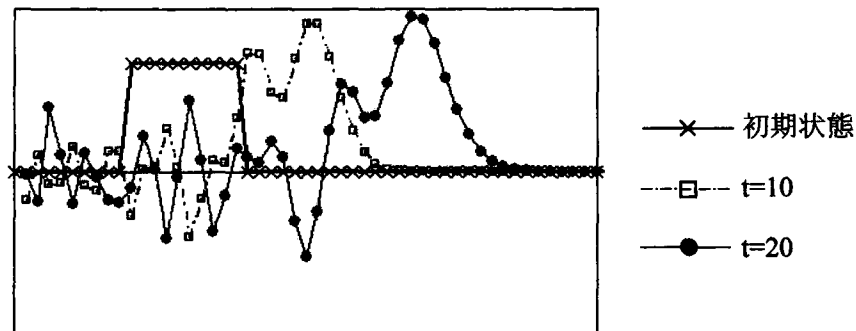


図 2.9.2 矩形波の移流計算（中心差分の場合、 $u=1.0$ ,  $dt=0.1$ ）

法として以下に示すような1次の風上差分が用いられることがある。

$$\left. \begin{aligned} f^{n+1}_i &= f^n_i - \Delta t \cdot u \frac{f^n_i - f^n_{i-1}}{\Delta x} & u \geq 0 \\ f^{n+1}_i &= f^n_i - \Delta t \cdot u \frac{f^n_{i+1} - f^n_i}{\Delta x} & u < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9-14)$$

この手法は、流速の方向を考慮し風上側のみの値を用いることで、数値振動の風上側への伝播を防ぎ安定的に移流計算を行うための手法である。また、解を発散させることなく計算を続行できる面から、市販の流体解析コードなどで未だに用いられる手法である。ただし、図 2.9.3 に示すように1次の風上差分では計算が進むにつれ初期の形状がなまってしまう問題がある。これは、差分の精度が1次であり、数値拡散の効果が入ってしまうためである。この数値拡散に対する対処法として、QUICK や河村・桑原スキームのように  $i$ ,  $i-1$ ,  $i+1$  点の情報だけでなく  $i-2$ ,  $i+2$  点の情報も用いて差分を高精度化する手法も開発されている。しかし、これらの手法では参照すべき格子点が多いことから、計算領域端点における処理方法が難しいという欠点がある。

このような課題を持つ、移流方程式の数値解法について矢部ら<sup>7)</sup>は格子点間の情報を3次曲線で近似する手法を提案している。まず、移流方程式の意味を考えると、図 2.9.4

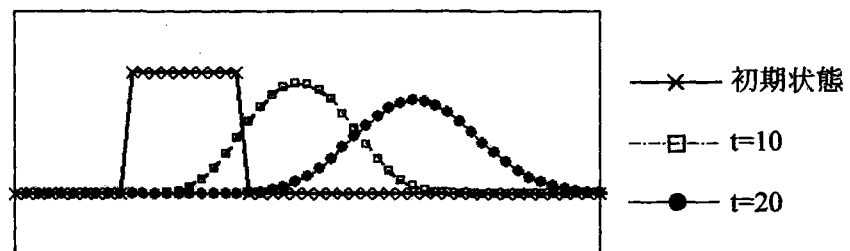


図 2.9.3 矩形波の移流計算 (1次風上差分の場合,  $u=1.0$ ,  $dt=0.1$ )

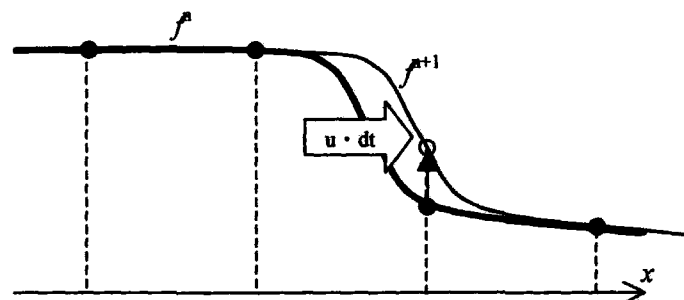


図 2.9.4 移流方程式のイメージ図( $f$ の波形が場の流速で移動する)

に示すように移流方程式は $f$ という波形が速度 $u$ で移動することを表す方程式であることがわかる。従って、格子点 $i$ における格子点間のプロファイルが $F_i(X)$ という関数で与えられるなら、移流方程式は数値計算上以下のように表現できる。

$$f_i^{n+1} = F_i^n(-\Delta t \cdot u) \quad (2-9-15)$$

そこで、矢部らは格子点間のプロファイルを与える手法として、 $F_i(X)$ を以下の3次多項式で表現することを提案した。

$$F_i(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (2-9-16)$$

ここに、 $X$ は格子点 $i$ からの距離である。この式(2-9-16)における係数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ は未知数であり、2点間の格子情報で4つの連立方程式を構成しなければ格子点間のプロファイルを決めることはできない。そこで、矢部らは各格子点に $f$ の値だけでなく $f$ の微分値 $f_x$ を導入することでこの問題に対処する手法を提案した。この手法を用いれば式(2-9-16)の未知である係数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ に関して以下の連立方程式を構成することができる。

$$F_i(0) = d \quad (2-9-17)$$

$$F_{xi}(0) = c \quad (2-9-18)$$

$$F_i(\Delta x') = a\Delta x'^3 + b\Delta x'^2 + c\Delta x' + d \quad (2-9-19)$$

$$F_{xi}(\Delta x') = 3a\Delta x'^2 + 2b\Delta x' + c \quad (2-9-20)$$

上式中の $F_i(0)$ ,  $F_{xi}(0)$ ,  $F_i(\Delta x')$ ,  $F_{xi}(\Delta x')$ ,  $\Delta x'$ は格子点が保有する情報により以下のようになら与えられる値である。

$$F_i(0) = f_i, \quad F_{xi}(0) = f_{xi} \quad (2-9-21)$$

$$\left. \begin{aligned} F_i(\Delta x') &= f_{i+1}, & F_{xi}(\Delta x') &= f_{xi+1} & (u \leq 0) \\ F_i(\Delta x') &= f_{i-1}, & F_{xi}(\Delta x') &= f_{xi-1} & (u > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2-9-22)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x_{i,j+1} & (u \leq 0) \\ \Delta x' &= -\Delta x_{i,j-1} & (u > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2-9-23)$$

$\Delta x_{ij}$ は $i$ 点と $j$ 点間の距離である。式(2-9-17), (2-9-18)より未知係数 $c$ ,  $d$ が定まる。また、これを式(2-9-19), (2-9-20)に代入することで未知係数 $a$ ,  $b$ は以下のように決定できる。

$$a = \frac{2\{F_i(0) - F_i(\Delta x')\} + \{F_{xi}(0) + F_{xi}(\Delta x')\}\Delta x'}{\Delta x'^3} \quad (2-9-24)$$

$$b = \frac{-3\{F_i(0) - F_i(\Delta x')\} - \{2F_{xi}(0) + F_{xi}(\Delta x')\}\Delta x'}{\Delta x'^2} \quad (2-9-25)$$

これらの計算にて、2点間の変数 $f$ に関するプロファイルを2点間の情報のみで3次多項式へと近似できる。このようにして得られた2点間における $F_X(X)$ を用いれば、式(2-9-15)にて変数 $f$ に関する移流の時間発展計算を行うことができる。ただし、この方法では格子点情報として変数 $f$ だけでなく変数 $f$ の微分値 $f_x$ を保有しているため、これについても時間発展させる必要がある。これについては、式(2-9-12)の両辺を $x$ で微分した次式

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} f_x \quad (2-9-26)$$

により計算を行う。式(2-9-26)を実際に解く場合には、以下のように $f_x$ に関する移流相と非移流相に分離し、各々の効果を2段階に分けて解く手法を用いる。

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0 \quad f_x^n \rightarrow \hat{f}_x \quad \text{※移流相の計算} \quad (2-9-27)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} f_x \quad \hat{f}_x \rightarrow f_x^{n+1} \quad \text{※非移流相の計算} \quad (2-9-28)$$

式(2-9-27)は $f_x$ の波形が速度 $u$ で移動する効果を表し、式(2-9-28)は移動の途中で $-(\partial u / \partial x) f_x \cdot dt$ の仕事を受け $f_x$ の波形が変形する効果を表すと考えることができる。従って、式(2-9-27)にて波形の移動を計算し、式(2-9-28)にて波形を変形させることで式(2-9-26)における $f_x$ の時間発展が解かれる。まず、式(2-9-27)の移流相の計算については、変数 $f$ に対する移流問題と同様の手法が適用でき、次式のようになる。

$$\hat{f}_{xi} = F_X^n(-\Delta t \cdot u) \quad (2-9-29)$$

$F_X(X)$ は式(2-9-16)の微分形で次式のように与えることができる。

$$F_X(X) = 3aX^2 + 2bX + c \quad (2-9-30)$$

非移流相による $f_x$ の波形変形は、式(2-9-28)を用いて以下のように計算できる。

$$f_{xi}^{n+1} = \hat{f}_{xi} - \left( \left( \Delta x_{i,i-1} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i,i+1}} + \Delta x_{i,i+1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_{i,i-1}} \right) / (\Delta x_{i,i+1} + \Delta x_{i,i-1}) \right) \hat{f}_{xi} dt \quad (2-9-31)$$

ここに、 $\hat{f}_{xi}$ は移流相により移動された波形であり、非移流相ではその波形に対して $-(\partial u / \partial x) \hat{f}_{xi} \cdot dt$ の仕事がなされたものとして、 $f_{xi}^{n+1}$ を求めている。

以上述べた矢部らの手法は、CIP(Cubic-Interpolated Pseudoparticle/Propagation)法と呼ばれ、移流問題を含む数値計算において近年活発に応用されている。ところで、先ほどの矩形波の移流問題についてCIP法を適用したテスト計算結果を図2.9.5に示す。この計算結果に

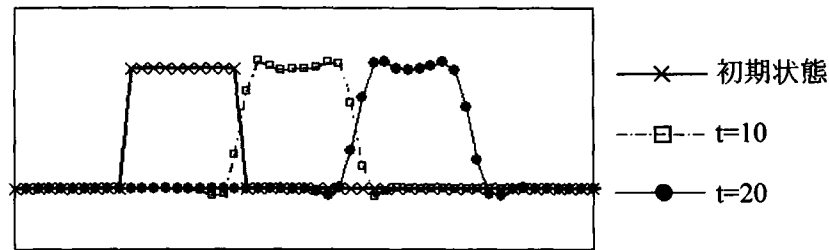


図 2.9.5 矩形波の移流計算(CIP 法の場合,  $u=1.0$ ,  $dt=0.1$ )

よると、若干のオーバーシュート・アンダーシュートが見られるものの、CIP 法による移流計算が数値拡散および発散振動を起こすことなく、矩形波の形状を移流できていることが分かる。

次に、この CIP 法を自由表面の速度ポテンシャルに関する時間発展式に導入することを考える。既に、式(2-9-11)にて自由表面の速度ポテンシャル時間発展式についての移流項を含む形式を提案したが、この式に CIP 法を適用するにあたって式(2-9-27)、(2-9-28)と同様に移流相と非移流相に分けて計算する次式のような方法を用いることとした。

$$\frac{D\phi}{Dt} + U \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad (2-9-32)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = G \quad (2-9-33)$$

ここでは、移流方程式(2-9-32)を解くことでいったん  $\phi^*$  に対する中間値  $\hat{\phi}$  (移流相による移動後の波形) を求め、その中間値を用いて非移流方程式(2-9-33)を解き、次タイムステップの速度ポテンシャルの仮値  $\phi'$  を更新する。まず、式(2-9-32)に示す移流方程式を解くことを考える。式(2-9-32)の移流に関わる座標系は自由表面接線に沿った 1 次元座標系であるので、図 2.9.6 に示すような座標系における移流問題を考える。式(2-9-32)における移

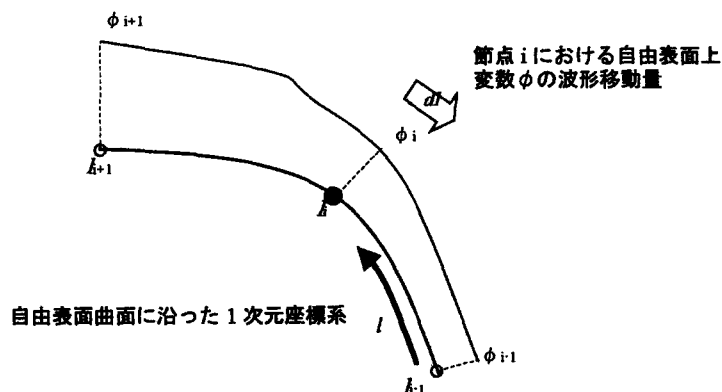


図 2.9.6 自由表面上の移流計算概念図



流速度は $-(\partial\phi/\partial s)$ であるが、Newmark- $\beta$ 法を用いる場合、節点に対する相対的な波形移動量  $dl$  は単純に $-(\partial\phi/\partial s)^n \cdot dt$ とはならず、節点  $i$  において以下のようになると考えることができる。

$$dl_i = - \left[ dt \frac{\partial\phi}{\partial s} \Big|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial s} \Big|_i \right) + (1-2\beta) \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi}{\partial s} \Big|_i^n \right) \right\} \right] \quad (2-9-34)$$

ここに、式(2-9-34)中の  $\phi'$  は 2. 8 で述べた次タイムステップにおける速度ポテンシャルの仮値である。

この波形移動量  $dl_i$  を用いると、速度ポテンシャルの中間値  $\hat{\phi}_i$  は CIP 法にて以下のように求められる。

$$\hat{\phi}_i = F_{\phi_i}^n(-dl_i) \quad (2-9-35)$$

ここに、 $F_{\phi_i}^n(l)$  はタイムステップ  $n$  における節点  $i$  周りの格子点間プロファイルであり、式(2-9-16)にならって次式のような関数とした。

$$F_{\phi_i}^n(l_c) = a_{\phi} l_c^3 + b_{\phi} l_c^2 + \phi_{si}^n l_c + \phi_i^n \quad l_c = l - l_i \quad \phi_s = \partial\phi/\partial s \quad (2-9-36)$$

$l_c$  は節点  $i$  を原点にとった場合の、自由表面接線に沿った 1 次元座標系における座標値である。ただし、節点  $i$  を起点として波形移動量  $dl_i$  が隣の節点  $i-1$  もしくは  $i+1$  を超える場合には、その位置がどの格子点間に存在するかの確認が必要となる。具体的には以下の条件によって、波形移動量  $dl_i$  の位置を表す節点番号として  $i0$ ,  $i1$  を決定する作業を行う。

$$\sum_{l=i}^{i0} L_{l',l} \leq |dl_i| \leq \sum_{l=i+1}^{i1} L_{l-1,l} \quad i1 = i0 + 1 \quad l' = \max(i, l-1) \quad (dl_i < 0) \quad (2-9-37)$$

$$\sum_{l=i}^{i0} L_{l',l} \leq |dl_i| \leq \sum_{l=i-1}^{i1} L_{l+1,l} \quad i1 = i0 - 1 \quad l' = \min(i, l+1) \quad (dl_i > 0) \quad (2-9-38)$$

$L_{ij}$  は自由表面上のラグランジュ座標点  $i$ ,  $j$  間の距離である。波形移動量  $dl_i$  に対応する節点番号  $i0$ ,  $i1$  が決まれば式(2-9-36)の未知係数は式(2-9-24), (2-9-25)と同様に以下のように決定できる。

$$a_{\phi} = \frac{2\{\phi_{i0}^n - \phi_{i1}^n\} + \{\phi_{si0}^n + \phi_{si1}^n\}L'}{L^3} \quad (2-9-39)$$

$$b_{\phi} = \frac{-3\{\phi_{i0}^n - \phi_{i1}^n\} - \{2\phi_{si0}^n + \phi_{si1}^n\}L'}{L^2} \quad (2-9-40)$$

$L'$ は、自由表面上のラグランジュ座標点  $i0$ ,  $i1$  間の距離で表される変数であり、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} L' &= L_{i0,i1} & (dl \leq 0) \\ L' &= -L_{i0,i1} & (dl > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2-9-41)$$

従って、速度ポテンシャルの中間値  $\hat{\phi}_i$  は次式のようになる。

$$\hat{\phi}_i = a_{\phi} \cdot l'^3 + b_{\phi} \cdot l'^2 + \phi_{si0}^n \cdot l' + \phi_{i0}^n \quad (2-9-42)$$

$$\left. \begin{aligned} l' &= -dl_i - \sum_{l=i}^{i0} L_{l',l} & I' = \max(i, I-1) & (dl_i < 0) \\ l' &= -dl_i + \sum_{l=i}^{i0} L_{l',l} & I' = \min(i, I+1) & (dl_i > 0) \end{aligned} \right\} \quad (2-9-43)$$

$\phi$  の自由表面接線方向に関する微分値  $\phi_s$  の時間発展についても、式(2-9-26)と同様に以下の方程式を解く事で求める。

$$\frac{D\phi_s}{Dt} + U \frac{\partial \phi_s}{\partial s} = - \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2-9-44)$$

上式を解く際には、以下のような2段階の式に分解し計算を行う。

$$\frac{D\phi_s}{Dt} + U \frac{\partial \phi_s}{\partial s} = 0 \quad (2-9-45)$$

$$\frac{D\phi_s}{Dt} = - \frac{\partial U}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2-9-46)$$

まず、式(2-9-45)については  $\phi_s$  に関する移流方程式であるといえる。従って、 $\phi_s$  の波形が速度  $U$  にて移動するものとし、この変化を反映した値  $\phi_s^m$  を次式によって計算する。

$$\phi_{si}^m = 3a_{\phi} \cdot l'^2 + 2b_{\phi} \cdot l' + \phi_{si0}^n \quad (2-9-47)$$

この  $\phi_s^m$  を元に、式(2-9-46)について次式のような差分計算を行い、中間値  $\hat{\phi}_s$  を求める。

$$\hat{\phi}_{si} = \phi_{si}^m - dt \cdot \phi_{si}^m \cdot \left( L_{i,i-1} \frac{-\phi_{si+1}^m + \phi_{si}^m}{L_{i,i+1}} + L_{i,i+1} \frac{-\phi_{si}^m + \phi_{si-1}^m}{L_{i,i-1}} \right) / (L_{i,i+1} + L_{i,i-1}) \quad (2-9-48)$$

以上の計算にて求められた速度ポテンシャルの中間値  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\phi}_s$  は、式(2-9-32)に示した移流相の効果を反映した値である。この値に対して、式(2-9-33)に示した非移流相の効果を付加することで、次タイムステップの速度ポテンシャルに関する仮値を更新する。ここで、非移流方程式(2-9-33)の時間発展手法には2. 8で示した Newmark- $\beta$  法を用いる。具体的

には次式のようになる。

$$\phi_i'' = \hat{\phi}_i + dt \cdot G_i'' + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{DG'}{Dt} \Big|_i + (1-2\beta) \frac{DG''}{Dt} \Big|_i \right\} \quad (2-9-49)$$

$\phi''$ は、次タイムステップの速度ポテンシャル仮値の更新された値である。式(2-9-49)中の右辺第2項、第3項および第4項は以下のように計算する。

$$G_i'' = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right)^2 - g \eta_i'' \quad (2-9-50)$$

$$\frac{DG'}{Dt} \Big|_i = -\frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right) + \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right) - g \frac{\partial \phi'}{\partial z} \Big|_i \quad (2-9-51)$$

$$\frac{DG''}{Dt} \Big|_i = -\frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right) + \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right) - g \frac{\partial \phi''}{\partial z} \Big|_i \quad (2-9-52)$$

$D(\partial \phi' / \partial \mathbf{s}) / Dt$ ,  $D(\partial \phi' / \partial \mathbf{n}) / Dt$ は式(2-8-32), (2-8-33)と同様に以下のように求められる。

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right) = \frac{2}{dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i - \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right) - \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \right) \quad (2-9-53)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right) = \frac{2}{dt} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i - \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right) - \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \phi''}{\partial \mathbf{n}} \Big|_i \right) \quad (2-9-54)$$

続いて $\phi$ の自由表面接線方向微分の次タイムステップ仮値に対する更新値 $\phi_{si}''$ は、式(2-9-49)を接線方向に微分した次式により計算する。

$$\phi_{si}'' = \hat{\phi}_{si} + dt \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left[ G_i'' + \frac{1}{2} dt \left\{ 2\beta \frac{DG'}{Dt} \Big|_i + (1-2\beta) \frac{DG''}{Dt} \Big|_i \right\} \right] \quad (2-9-55)$$

この式の右辺の $G$ に関する項を以下のようにまとめると

$$H_i' = \left[ G_i'' + \frac{1}{2} dt \left\{ 2\beta \frac{DG'}{Dt} \Big|_i + (1-2\beta) \frac{DG''}{Dt} \Big|_i \right\} \right] \quad (2-9-56)$$

式(2-9-55)は以下のように表すことができる。

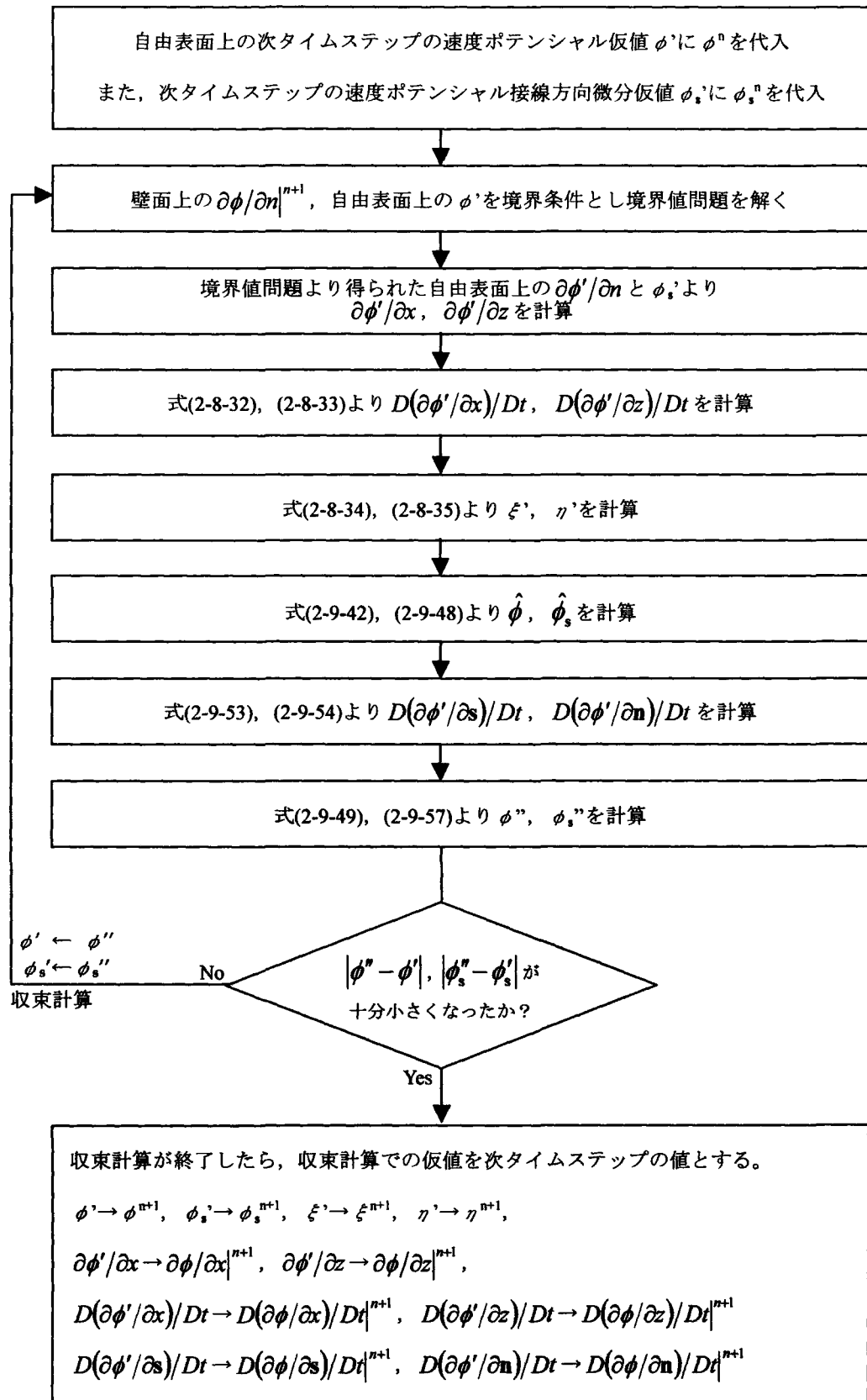
$$\phi_{si}'' = \hat{\phi}_{si} + dt \cdot \frac{\partial H_i'}{\partial \mathbf{s}} \Big|_i \quad (2-9-57)$$

式(2-9-57)を数値計算にて解く場合には、空間微分項を中心差分で次式のように表すことができる。

$$\phi_{s_i}'' = \hat{\phi}_{s_i} + dt \cdot \left( L_{i,j-1} \frac{H'_{i+1} - H'_i}{L_{i,j+1}} + L_{i,j+1} \frac{H'_i - H'_{i-1}}{L_{i,j-1}} \right) / (L_{i,j+1} + L_{i,j-1}) \quad (2-9-58)$$

実際の計算では、式(2-9-49)及び式(2-9-57)より求めた更新値  $\phi''$  ,  $\phi_s''$  を、次収束計算ステップでの仮値  $\phi'$  ,  $\phi_s'$  に代入し一連の計算を繰り返す。収束計算を繰り返すと仮値と更新値がほぼ等しくなるため、そこで収束計算を終了して、求めた仮値を次タイムステップの変数とする。

この CIP 法による自由表面の時間発展手法を 2. 8 にて説明した Newmark- $\beta$  法による時間発展計算に導入する場合の計算フローを図 2.9.7 に示す。

図 2.9.7 Newmark- $\beta$  法と CIP 法を導入した場合の自由表面上変数の時間積分

## 2. 10 造波及び水槽端部からの反射波防止手法

これまで述べてきた自由表面付流体解析の用途の一つに、数値造波水槽（NWT : Numerical Wave Tank）としての数値実験が挙げられる。ここで、規則波中の浮体応答等を定常状態となるまで計算するには、数値造波水槽内で長時間の造波を行う必要があるが、水槽端からの反射波の影響により検討対象時間が限られてしまうことが問題点となる。これに対する解決策の一つとして、単純に計算領域を十分長くする方法がある。しかし、この場合には境界要素数が多くなり計算時間が大幅に増大するため実用に適さない。そこで、計算領域を節約するために水槽端部からの反射波をうまく防止する手法が必要となる。この手法として代表的なものに Sommerfeld の放射条件を用いる方法<sup>17)</sup>がある。この方法は余分な計算領域を必要としないため計算時間の面で利点があるが、不規則波や規則波でも非線形性の強い自由表面運動の場合には高い消波効率が得られ難い欠点を持つ。別の手法としては水槽端部に波減衰領域を設ける方法<sup>18)</sup>がある。これは、水槽端部の一定区間に自由表面の運動を減衰させる領域を設けることで水槽端部からの反射波を防止するものである。この方法では、Sommerfeld の放射条件を用いる場合に比べ余分な計算領域が必要となるが、不規則波や非線形性の強い規則波でも高い消波効率を得られる柔軟性を有している。さらに、波減衰領域は造波機側にも設けることができるため造波機からの再反射を防止することが可能である。以上の理由により、波減衰領域を用いる消波手法を用いることとし、以下に具体的な計算手法を述べる。

波減衰領域では、自由表面条件に人工的な減衰項を付加して入射波を減衰させる。この減衰項を付加した自由表面条件は次式のようにになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - g\eta - \nu(X_e)(\phi - \phi_e) \quad (2-10-1)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nu(X_e)(\eta - \eta_e) \quad (2-10-2)$$

この式中で  $\phi_e$ 、 $\eta_e$  は速度ポテンシャル、自由表面形状の目標値であり、値のズレが大きいほど減衰が働く仕組みとなっている。消波を行うための目標値  $\phi_e$ 、 $\eta_e$  には 0.0 の値が用いられる。減衰係数  $\nu(X_e)$  は減衰領域

$$X_{e0} \leq X_e \leq X_{e1} = X_{e0} + \beta_e \lambda \quad (2-10-3)$$

内で定義される次式の関数である。

$$\nu(X_e) = \alpha_e \left( \frac{X_e - X_{e0}}{\beta_e \lambda} \right)^2 \quad (2-10-4)$$

ここで、 $\lambda$ は造波する波の波長、 $\alpha_e$ は減衰強さ、 $\beta_e$ は減衰領域長さを調節するパラメータである。これらの値が大きいほど波の減衰効果は大きくなるが、谷澤ら<sup>8)</sup>は数値実験より $\alpha_e$ 、 $\beta_e$ の値が1.0程度あれば十分な消波効果を得られることを確認している。

ここで、2. 8で説明した Newmark- $\beta$  法による速度ポテンシャル $\phi$ 及び鉛直変位 $\eta$ の時間発展式は以下のとおりである。

$$\phi'_i = \phi_i^n + dt \frac{D\phi}{Dt} \Big|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D^2\phi'}{Dt^2} \Big|_i + (1-2\beta) \frac{D^2\phi}{Dt^2} \Big|_i^n \right\} \quad (2-10-5)$$

$$\eta'_i = \eta_i^n + dt \frac{D\eta}{Dt} \Big|_i^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \frac{D^2\eta'}{Dt^2} \Big|_i + (1-2\beta) \frac{D^2\eta}{Dt^2} \Big|_i^n \right\} \quad (2-10-6)$$

この式に、波減衰領域を導入することを考える。まず、時間に対する1次の項は式(2-10-1)、(2-10-2)より以下のようにになる。

$$\frac{D\phi}{Dt} \Big|_i^n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_i^n \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_i^n \right)^2 \right\} - g\eta_i^n - \nu(X_{ei}) (\phi_i^n - \phi_{ei}^n) \quad (2-10-6)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} \Big|_i^n = \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_i^n - \nu(X_{ei}) (\eta_i^n - \eta_{ei}^n) \quad (2-10-7)$$

また、時間に関する2次の項は式(2-10-6)、(2-10-7)を時間微分することにより次式のようにになる。(ここでは、次タイムステップにおける速度ポテンシャル、鉛直変位の仮値に対する計算式を示すが、現在タイムステップ $n$ でも同じ要領で計算を行う。)

$$\frac{D^2\phi'}{Dt^2} \Big|_i = \frac{\partial\phi'}{\partial x} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial x} \Big|_i \right) + \frac{\partial\phi'}{\partial z} \Big|_i \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial z} \Big|_i \right) - g \frac{\partial\phi'}{\partial z} \Big|_i - \nu(X_{ei}) \left( \frac{D\phi'}{Dt} \Big|_i - \frac{D\phi_e}{Dt} \Big|_i^{n+1} \right) \quad (2-10-8)$$

$$\frac{D^2\eta'}{Dt^2} \Big|_i = \frac{2}{dt} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial z} \Big|_i - \frac{\partial\phi}{\partial z} \Big|_i^n \right) - \frac{D^2\eta'}{Dt^2} \Big|_i - \nu(X_{ei}) \left( \frac{\partial\phi'}{\partial z} \Big|_i - \frac{\partial\phi_e}{\partial z} \Big|_i^{n+1} \right) \quad (2-10-9)$$

造波機から、再反射無しに造波を行うには造波側の水槽端部にも同様の波減衰領域を設け、速度ポテンシャル及び自由表面形状の目標値 $\phi_e$ 、 $\eta_e$ に造波したい波の状態を入力してやればよい。この際の $\phi_e$ 、 $\eta_e$ は、本計算の前段階であらかじめ造波シミュレーションで求

めたものを使用すればよい。もっと簡易な方法としては、以下のピストン型造波機に関する線形解を用いて速度ポテンシャル及び自由表面形状の目標値 $\phi_e$ ,  $\eta_e$ を決定する手法もある。

$$\phi_e = \frac{4s \tanh kh \sinh kh}{\omega_p (2kh + \sinh 2kh)} \cosh k(\eta + h) \cos(kX_e - \omega_p t) \quad (2-10-10)$$

$$\eta_e = \frac{4s_p \sinh^2 kh}{2kh + \sinh 2kh} \sin(kX_e - \omega_p t) \quad (2-10-11)$$

ここで、 $h$ は水深、 $k$ は波数( $=2\pi/\lambda$ )、 $s_p$ ,  $\omega_p$ はピストンの振幅と角周波数である。



## 2. 1 1 浮体との連成計算方法

自由表面付き流体解析を浮体と連成させて計算する手法について、谷澤ら<sup>8)</sup>の考え方を参考に以下に述べる。流体中の浮体運動を評価するためには、浮体表面における流体運動の状態が必要となる。

まず、2次元問題において図2.11.1のような微小の流体に関する力の釣り合いを考える。

$$\rho \Delta x \Delta z \frac{d^2 x}{dt^2} = \left\{ \left( p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) - \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) \right\} \Delta z \quad (2-11-1)$$

$$\rho \Delta x \Delta z \frac{d^2 z}{dt^2} = \left\{ \left( p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \right) - \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \right) \right\} \Delta x - \rho \Delta x \Delta z g \quad (2-11-2)$$

従って式(2-11-1)、(2-11-2)をベクトルにて一般的に表現するなら次式のようなになる。

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{Z} \quad (2-11-3)$$

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  は加速度, 速度のベクトルである。また,  $\mathbf{Z}$  については2次元問題の場合には  $\mathbf{Z}=(0, gz)$  である。ここで,  $\mathbf{v}=\nabla \phi$  であるので,  $\mathbf{a}$  は以下のように表される。

$$\mathbf{a} = \frac{D\nabla \phi}{Dt} = \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi = \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) \quad (2-11-4)$$

これを、式(2-11-3)に代入し両辺の  $\nabla$  を消去すれば式(2-2-5)のベルヌーイ式となり、これが流体内の力学的条件となっていることが分かる。ここで、加速度ポテンシャルを以下のように

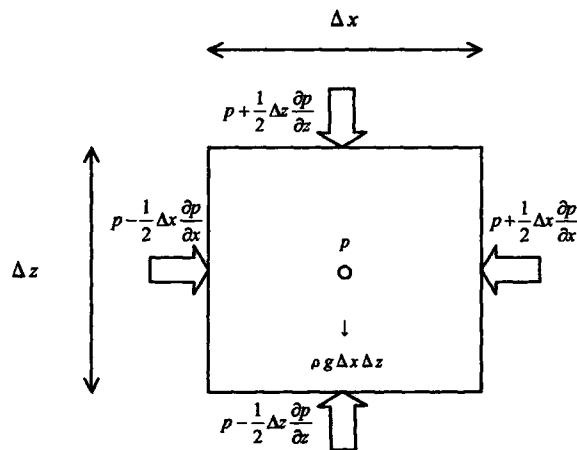


図 2.11.1 微小流体における力の釣りあい

$$\Phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 \quad (2-11-5)$$

と定義すると  $\mathbf{a} = \nabla \Phi$  となり，加速度ポテンシャルの勾配で流体の加速度を表現できる。谷澤ら<sup>8)</sup>は，それ以前に開発された解析手法においてこの加速度ポテンシャルが利用されてこなかったのは，加速度ポテンシャルの物理的意味が明確にされてこなかったことが原因であると述べている。しかし，谷澤ら<sup>8)</sup>は式(2-11-1)～(2-11-4)よりその力学的意味は流体の慣性力を表す加速度に相当するものであり，これにより物体表面の動的な力学的釣り合いを保証することが重要であるとしている。以下に，物体表面での力学的釣り合いを満たすための定式化を谷澤ら<sup>8)</sup>の手法に沿って述べることとする。

まず，加速度場における物体表面の幾何学的条件を求めるために，物体表面に添って運動する流体の速度・加速度に関する表示式を求める。ここで，図 2.11.2 に示すような座標系を考える。図中の  $\mathbf{v}_0$  は浮体重心の速度ベクトル， $\omega$  は浮体の重心周りの角速度である。ここに，点  $P$  を浮体表面上の流体を表す点とし，重心の位置ベクトルを  $\mathbf{R}_0$ ，点  $P$  の重心からの相対位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすると，点  $P$  の位置ベクトル  $\mathbf{R}$  は以下のように表される。

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \quad (2-11-6)$$

これを時間微分すると絶対座標系における点  $P$  の速度ベクトル  $\mathbf{v}$  は，

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 + [\mathbf{v}] + \omega \times \mathbf{r} \quad (2-11-7)$$

となる。ここで， $[\mathbf{v}]$  は浮体上から見た点  $P$  の速度， $\omega \times \mathbf{r}$  は浮体の回転により生ずる速度を意味する。絶対座標系における点  $P$  の加速度はこれを更に時間微分することで求めら

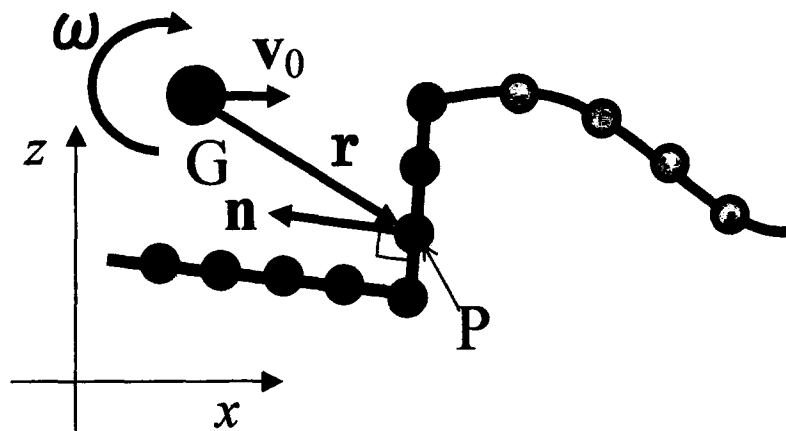


図 2.11.2 物体表面の幾何学的関係

れる。

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_0 + [\mathbf{a}] + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times [\mathbf{v}] + \dot{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2-11-8)$$

ここで  $\mathbf{a}_0$  は物体重心の加速度,  $[\mathbf{a}]$  は浮体上から見た点 P の加速度である。また,  $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  は物体の回転による点 P の加速度で, その方向は  $\mathbf{r}$  とは逆方向で重心方向に向かう求心加速度である。 $2\omega \times [\mathbf{v}]$  は回転軸と  $[\mathbf{v}]$  に直交するベクトルであり, 最後の項は物体の回転角加速度  $\dot{\omega}$  による点 P の加速度である。

次にこれらの浮体表面上における点 P の速度, 加速度を用いて物体表面上の幾何学的境界条件を求める。まず, 点 P における速度場および加速度場の物体表面の幾何学的境界条件は, 物体表面の法線ベクトルと速度および加速度の内積により以下のように表現される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (2-11-9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \quad (2-11-10)$$

まず,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$  については式(2-11-7)より次式のようなになる。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}] \quad (2-11-11)$$

流体は物体表面から離れず移動することを考えれば  $[\mathbf{v}]$  の方向は浮体表面の接線方向である。よって, 式(2-11-11)の右辺第 2 項はベクトルの直交性により消えるため, 式(2-11-9)は最終的に以下のようなになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}) \quad (2-11-12)$$

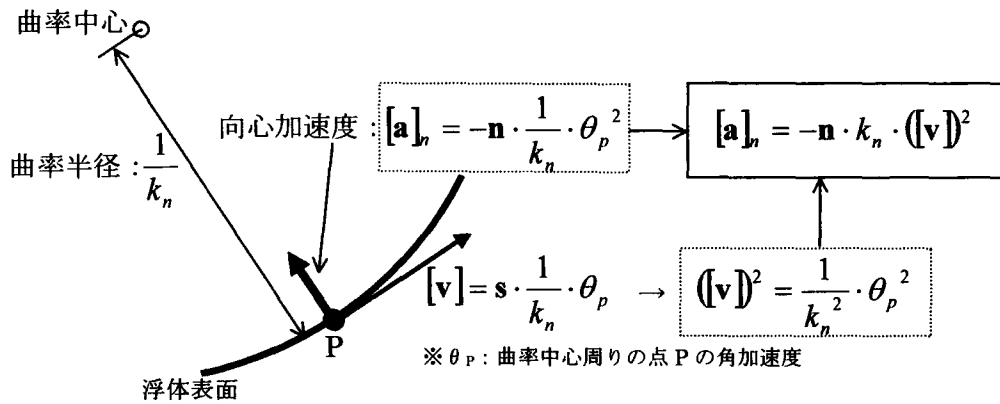
当然ではあるが, 速度場の浮体表面における幾何学的境界条件は浮体の運動のみで決定できることが分かる。しかし, 加速度場の浮体表面における幾何学的境界条件は速度場の場合と異なってくる。まず,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  については式(2-11-8)より以下のようなになる。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}] + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot 2\omega \times [\mathbf{v}] \quad (2-11-13)$$

一般に  $\mathbf{n}$  と  $[\mathbf{a}]$  は直交しないので消去できない。また,  $[\mathbf{v}]$  を含んだ形であるため速度場と独立な関係ではない。従って式(2-11-13)を実際に計算するには, 浮体の運動と流体の速度・加速度場を考慮することが必要となる。まず,  $[\mathbf{v}]$  は式(2-11-7)から以下のようなになる。

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 - \omega \times \mathbf{r} = \nabla \phi - \mathbf{v}_0 - \omega \times \mathbf{r} \quad (2-11-14)$$

$[\mathbf{a}]$  については, 以下のように法線方向成分  $[\mathbf{a}]_n$  と接線方向成分  $[\mathbf{a}]_s$  に分解する。

図 2.11.3  $[a]_n$  の概念図

(点 P は浮体表面の曲率中心を中心に円運動し、そのときに向心加速度  $[a]_n$  が発生する)

$$[a] = [a]_n + [a]_s = -n \cdot k_n ([v])^2 + [\dot{v}]_s \quad (2-11-15)$$

ここに、 $k_n$  は浮体表面に沿った曲率であり、図 2.11.3 に示すように  $-n \cdot k_n ([v])^2$  の項は、点 P の向心加速度を表している。また、この式では  $[a]_s$  は加速度場を解くまで未定であるが、 $n \cdot [a]_s$  は直交性により消去できる。従って、式(2-11-13)中の  $n \cdot [a]$  は、

$$n \cdot [a] = n \cdot ([a]_n + [a]_s) = n \cdot [a]_n = -k_n ([v])^2 = -k_n (\nabla \phi - v_0 - \omega \times r)^2 \quad (2-11-16)$$

となる。よって浮体表面における加速度場の幾何学的境界条件は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = & -k_n (\nabla \phi - v_0 - \omega \times r)^2 + n \cdot (a_0 + \dot{\omega} \times r) \\ & + n \cdot \omega \times (\omega \times r) + n \cdot 2\omega \times (\nabla \phi - v_0 - \omega \times r) \end{aligned} \quad (2-11-17)$$

以上により得られた浮体表面の幾何学的境界条件に基づいて浮体の運動方程式を解くことを考える。浮体が剛体の場合、浮体重心の運動方程式は以下のとおりである。

$$m \cdot A_0 + c \cdot V_0 + k \cdot X_0 = F \quad (2-11-18)$$

ここに、 $m$ ,  $c$ ,  $k$  は浮体の質量・回転慣性、減衰係数、ばね係数に関するマトリクスであり、 $F$  は浮体に作用する流体力のベクトルである。また、 $A_0$ ,  $V_0$ , 及び  $X_0$  は浮体の並進成分あるいは回転成分における加速度、速度、変位を一体的に表したベクトルである。この外力のベクトルは流体力によるもの  $f_f$  とそれ以外のもの  $f_e$  の足し合わせで表現できる。

$$F = f_f + f_e \quad (2-11-19)$$

浮体に作用する流体力ベクトル  $f_f$  は、以下のように浮体表面  $S_s$  の圧力を積分することで計算でき、並進成分については

$$f_{fi} = \int_{S_i} p \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-11-20)$$

重心周りの回転成分については

$$f_{fi} = \int_{S_i} p \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{r} ds \quad (2-11-21)$$

となる。従って、圧力  $p$  が求まれば式(2-11-18)の浮体の重心に関する運動方程式を解くことができる。ここで圧力  $p$  は、既に述べたように流体の力の釣り合いより得られる式、すなわちベルヌーイ式より以下のように表される。

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + Z \right\} \quad (2-11-22)$$

この式中で右辺の第2項、第3項は浮体の運動状態により決定できるが、右辺第1項に速度ポテンシャル  $\phi$  の時間に対する偏微分値が入っており、この値の計算手法が問題となる。この  $\phi$  の時間に対する偏微分値については、従来より後退差分がよく用いられてきた。この手法は簡便であるだけでなく、波浪強制力の成分は静水圧成分が大きいため尤もらしい計算結果が得られる。しかし、この手法では計算精度と安定性の面から問題があるだけでなく、運動量保存の観点からも満足な結果が得られにくい。Vinje<sup>19)</sup>や谷澤<sup>20)</sup>は浮体の運動方程式を用いて浮体表面の幾何学的条件式より浮体加速度を消去する陰的解法にてこの問題に対処している。ただし、この手法では既存の構造運動解析コードを取込むことが難しい。そこで、Sen<sup>21)</sup>らや Coa<sup>22)</sup>らの研究にて用いられた計算手法を参考に、この問題に対処することとした。この手法は、流体・浮体の連立方程式を各々解き、それらを連成させて繰返し計算することにより力学的整合性を満足させる手法である<sup>23)</sup>。

繰返し計算では、次タイムステップにおける力の釣り合いを成立させるように次タイムステップの値が計算される。ここで、次タイムステップにおける力の釣り合いを計算するには次タイムステップ浮体表面の流体圧  $p$  を求めなければならない。しかし、先ほど述べたように  $p$  の計算には速度ポテンシャル  $\phi$  の時間微分値の計算が必要になる。これを計算するには、連続式より求められた速度ポテンシャルに関するラプラス方程式を微分した次式に対する境界値問題を解く必要がある。

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (2-11-23)$$

この式は、速度ポテンシャルの時間微分値に対するラプラス方程式の形式となっている。従って、速度ポテンシャルに対する境界値問題を解く際に用いる境界要素法の連立方程式マトリクスをそのまま転用することができる。この境界値問題における、自由表面上の境界条件は式(2-2-6)より次式のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \phi - Z \quad (2-11-24)$$

平らな固定壁面上では、速度ポテンシャルの時間微分を更に法線方向微分した値に対して、境界条件が課せられる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (2-11-25)$$

浮体表面上でも、速度ポテンシャルの時間微分を更に法線方向微分した値に対して境界条件が与えられるが、固定壁の場合とは異なる条件となる。ここで、式(2-11-5)の加速度ポテンシャルの定義より、速度ポテンシャルの時間微分値は以下のように表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Phi - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \quad (2-11-26)$$

この式の両辺を、浮体表面について法線方向微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) \quad (2-11-27)$$

となる。これに式(2-11-17)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = & -k_n (\nabla \phi - \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) \\ & + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times (\nabla \phi - \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) \end{aligned} \quad (2-11-28)$$

となり、これが浮体表面上の境界条件となる。この境界条件式における右辺最後の項の計算は、物体表面近傍の流体内部の点で流体速度を計算し差分することにより、直接的に計算することができる。しかし、この方法では内部点の位置により求める値が大きく変化するため数値的に収束しにくい欠点がある。そこで、この項の計算には、谷澤ら<sup>8)</sup>が示した以下の手法を用いる。

物体表面の曲率中心を原点とする局所座標系( $r, \theta$ )を用いて、流体速度の2乗の $r$ 方向

勾配を書き表すと式(2-11-28)の右辺最後の項は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right\} \quad (2-11-29)$$

また，ラプラスの式より次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2-11-30)$$

式(2-11-30)を用いることで式(2-11-29)は以下のように変形される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) = -\frac{1}{r} \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \left( -\frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (2-11-31)$$

ここで，以下の関係

$$\frac{\partial}{\partial r} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}, \quad \frac{\partial}{r \partial \theta} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}}, \quad \frac{1}{r} \equiv k \quad (2-11-32)$$

より式(2-11-31)は以下のように書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right) = -k (\nabla \phi)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \left( -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{s}^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) \quad (2-11-33)$$

この式(2-11-33)を用いれば，式(2-11-28)の右辺最後の項は浮体表面境界上で定義されている変数  $\phi$  及び  $\partial \phi / \partial \mathbf{n}$  と境界形状を用いて計算がすることができる。

ここで，浮体の運動計算を自由表面付流体計算へ導入することを考える。まず，浮体の運動を Newmark- $\beta$  法にて表現することとすると，式(2-11-18)より次タイムステップにおける浮体の運動状態（加速度・速度・変位）は以下のように表すことができる。

$$\mathbf{X}_0|^{n+1} = \mathbf{X}_0|^{n+1} + dt \cdot \mathbf{V}_0|^{n+1} + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \mathbf{A}_0|^{n+1} + (1-2\beta) \mathbf{A}_0|^{n+1} \right\} \quad (2-11-34)$$

$$\mathbf{V}_0|^{n+1} = \mathbf{V}_0|^{n+1} + dt \left\{ \alpha \mathbf{A}_0|^{n+1} + (1-\alpha) \mathbf{A}_0|^{n+1} \right\} \quad (2-11-35)$$

$$\mathbf{A}_0|^{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{F}|^{n+1} - \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{X}_0|^{n+1} + dt \cdot \mathbf{V}_0|^{n+1} + \frac{1}{2} dt^2 (1-2\beta) \cdot \mathbf{A}_0|^{n+1} \right) - \mathbf{c} \cdot \left( \mathbf{V}_0|^{n+1} + dt(1-\alpha) \mathbf{A}_0|^{n+1} \right) \right\} \quad (2-11-36)$$

式(2-11-36)中の  $\mathbf{M}$  は，次式に示すマトリクスである。

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + dt \cdot \alpha \cdot \mathbf{c} + dt^2 \cdot \beta \cdot \mathbf{k} \quad (2-11-37)$$

式(2-11-34)～(2-11-37)より，浮体の次タイムステップにおける加速度，速度及び変位は， $\mathbf{F}|^{n+1}$  が決定されれば求まる。ただし， $\mathbf{F}|^{n+1}$  を決定するには次タイムステップにおける流

体の状態を決定しなければならない。この流体の状態は、浮体の次タイムステップの運動状態にも影響されるため、現在タイムステップの流体及び浮体の状態量だけで決定することはできない。従って、2. 8や2. 9で述べたような収束計算の過程に浮体の運動計算を取り込んだ形で時間発展計算を行う必要がある。以下にその手順を述べる。

まず収束計算過程における次タイムステップの流体自由表面上速度ポテンシャルの仮値  $\phi'$  と、次タイムステップにおける浮体の運動状態の仮値  $\mathbf{X}_0'$ ,  $\mathbf{V}_0'$ ,  $\mathbf{A}_0'$  を式(2-11-12)に代入することにより、浮体表面境界上での速度ポテンシャル法線方向微分の仮値  $\partial\phi'/\partial\mathbf{n}$  が得られる。これらを用いて、速度場の境界値問題を解く。これにより、浮体表面上の次タイムステップにおける速度ポテンシャルの仮値  $\phi'$  が求まる。

この  $\phi'$  を式(2-11-28)に代入することにより、加速度場における浮体表面上の境界条件の仮値  $\partial(\partial\phi'/\partial t)/\partial\mathbf{n}$  を計算する。また、自由表面上の速度ポテンシャル仮値  $\phi'$  及び  $\phi'$  より計算される自由表面変位の仮値 ( $\xi'$ ,  $\eta'$ ) を式(2-11-24)に代入することで、加速度場における自由表面上境界条件の仮値  $\partial\phi'/\partial t$  を計算する。そして、これらの値を境界条件とし、式(2-11-23)の境界値問題を解く。これにより、浮体表面上における速度ポテンシャル時間微分の仮値  $\partial\phi'/\partial t$  が求まる。

$\partial\phi'/\partial t$ ,  $\phi'$  を式(2-11-22)に代入することにより、浮体表面上における次タイムステップの圧力の仮値  $p'$  が求まる。さらに、これを式(2-11-19)～(2-11-21)に代入することで、浮体に作用する流体力ベクトルの仮値  $\mathbf{F}'$  を求めることが出来る。

浮体に作用する流体力ベクトルの仮値  $\mathbf{F}'$  を式(2-11-34)～(2-11-37)の  $\mathbf{F}^{n+1}$  に代入し、浮体の次タイムステップにおける仮値の更新値  $\mathbf{X}_0''$ ,  $\mathbf{V}_0''$ ,  $\mathbf{A}_0''$  を求める。この  $\mathbf{X}_0''$ ,  $\mathbf{V}_0''$ ,  $\mathbf{A}_0''$  を  $\mathbf{X}_0'$ ,  $\mathbf{V}_0'$ ,  $\mathbf{A}_0'$  に代入し、一連の計算を繰り返す。また、 $\mathbf{X}_0''$ ,  $\mathbf{V}_0''$ ,  $\mathbf{A}_0''$  と  $\mathbf{X}_0'$ ,  $\mathbf{V}_0'$ ,  $\mathbf{A}_0'$  の差が十分小さくなったところで収束計算を打ち切る。

以上述べた手法による自由表面付流体と浮体の連成計算フローを、図 2.11.4 に示す。



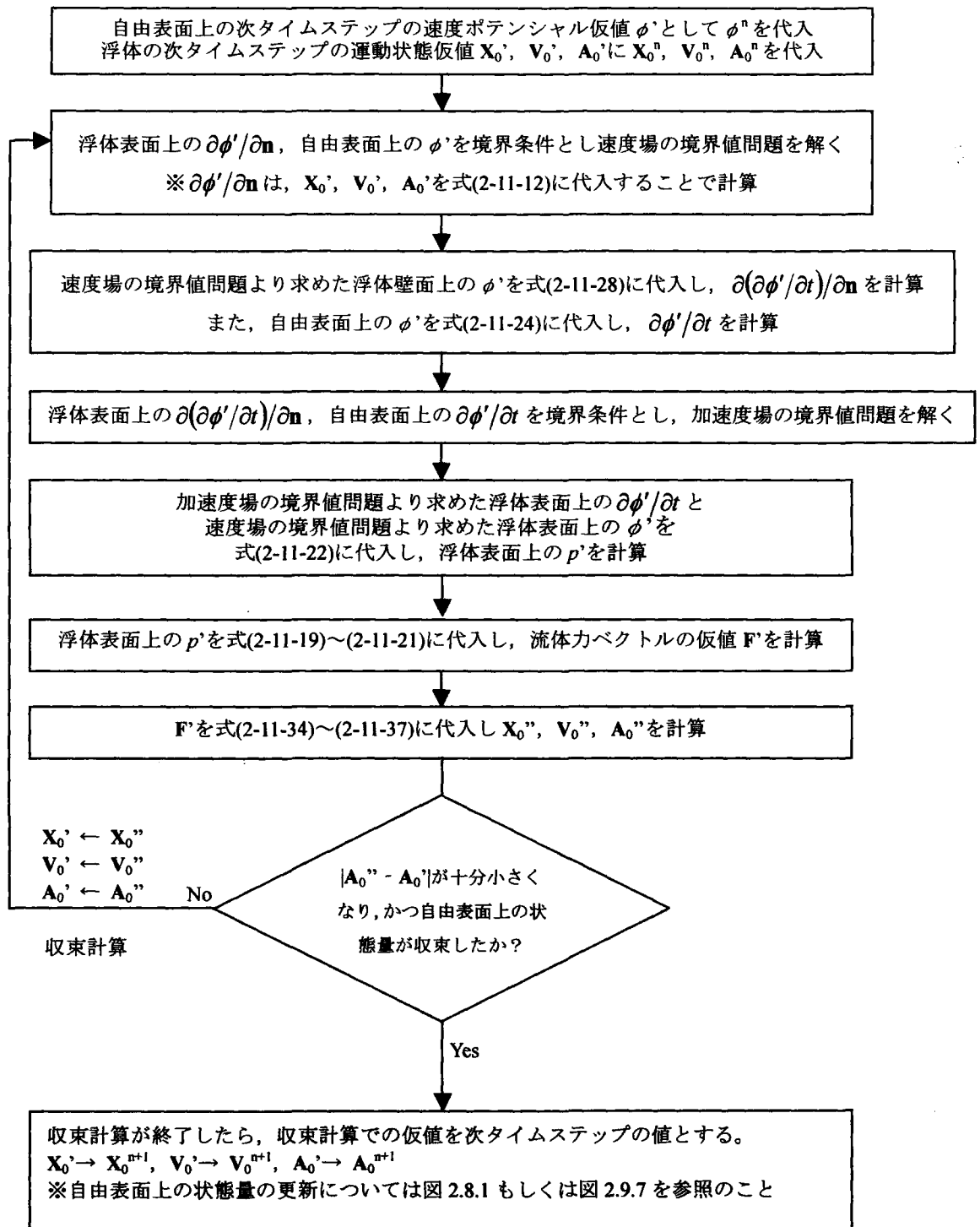


図 2.11.4 自由表面付流体と浮体の連成計算フロー

## 2. 1 2 結言

本章では、「BEMによる自由表面付流体計算及び浮体計算との連成」に関して、計算方法の整理および改善手法の提案・定式化を行った。まとめを以下に述べる。

- (1) 2. 2にて、速度ポテンシャルに関する、流体の連続条件、壁面境界条件、自由表面上における動力学的条件及び運動学的条件を整理した。また、それらを連続条件に関する境界値問題と自由表面形状を決定するための初期値問題に分け、各々の一般的解法について2. 3, 2. 4に整理した。
- (2) 液面と壁面との交点での処理について2重節点の手法を2. 5に示した。また、2重節点の移動量が一致するよう計算上のテクニックを提案し、定式化を行った。
- (3) 境界要素節点のラグランジュ移動に伴う問題について、平滑化手法及び節点の再配置手法を2. 6にまとめた。特に、節点の再配置手法についてはB-スプラインを用いた手法を提案し、B-スプラインの計算手法及びそれを用いた節点再配置のアルゴリズムを示した。また、2. 7にて自由表面上における節点のラグランジュ移動に関する精度向上のための改善手法を提案し、定式化を行った。
- (4) 時間発展手法に関して、2. 8にてNewmark- $\beta$ 法を用いた陰的な時間発展手法を提案し、計算アルゴリズムを示した。この方法では、現在タイムステップだけでなく、次タイムステップの流体連続条件も満たすよう自由表面上における節点移動量及び速度ポテンシャル変化量が計算される。本手法により、単純な陽解法であるオイラー法に比して時間発展精度、流体体積保存性の向上が図ることができる。
- (5) 速度ポテンシャルの時間発展式が移流方程式の形であることに着目し、2. 9にて移流方程式を精度良く且つ安定的に解くことの出来るCIP法の導入を提案した。また、Newmark- $\beta$ 法に導入するための定式化及び計算アルゴリズムを示した。
- (6) 数値造波水槽としての用途に関して、計算領域端部からの造波及び反射波防止のための手法を2. 10にまとめ、Newmark- $\beta$ 法へ導入するための定式化を行った。
- (7) 浮体表面における速度ポテンシャル、加速度ポテンシャルの境界条件を、2. 11にて整理した。また、それらの境界条件に基づいて浮体運動及び流体との連成を考慮するための計算アルゴリズムを示した。

## 参考文献

- 1) 柏木 正 他 : 実践 浮体の流体力学 前編—動揺問題の数値計算法 : 成山堂書店, 2003
- 2) Noblesse, F.(1982) : The Green Function in the Theory of Radiation and Diffraction of Regular Water Waves by a Body, Journal of Engineering Mathematics, Vol.16, pp.137-169
- 3) Sugino, R. and Tosaka, R.(1992) : Sloshing analysis by boundary element method with direct differentiation procedure : Theoretical and Applied Mechanics, 38 : pp.53-59, University of Tokyo Press
- 4) 登坂宣好, 杉野隆三郎(1991) : 境界要素法による孤立波の数値シミュレーション : BEM・テクノロジーコンファレンス論文集, 1 : pp.95-100
- 5) 登坂宣好, 宮田秀明 他 : 移動境界流れ解析 (数値流体力学シリーズ 4) : 東京大学出版会 : 1995
- 6) 登坂宣好, 中山 司 : 境界要素法の基礎 : 日科技連出版社 : 1987
- 7) T.Yabe, F.Xiao and T.Utsumi(2001) : Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis. , J. Comput. Phys., 169 : pp.556-593.
- 8) 谷澤克治(1997) : 加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究, 学位論文, 大阪大学, 127p.
- 9) Longuet-Higgins, M. S., and Cockett, E.D.(1976) : The deformation of steep surface waves on water : I. A. numerical method of computation. : Proc. R. Soc. London A., 350 : pp.1-26
- 10) Savitzky, A. and Golay, M. J. E. (1964) : Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. : Anal. Chem., 36 : pp.1627-1639
- 11) 桜井 明 : Cによるスプライン関数 : 東京電機大学出版局, 1993
- 12) Abe, K.(1996) : Int. J. Numer. Methods Engs., 39, 2769
- 13) Nakayama, T. (1990) : A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free-surface. : Int. J. Numer. Meth. Fluids, 10 : pp.683-695
- 14) Newmark, N. M.(1959) : A Method of Computation for Structural Dynamic, Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings, ASCE, July 1959, pp.67 - 94

- 15) Bathe, K. J. and Wilson, E. L.(1973) : Stability and accuracy analysis of direct integration methods,Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.1, pp.283-291
- 16) 山本利弘, 藤谷義信, 藤井大地(1996) : 摩擦・接触要素を含む構造物の非線形振動解析について (多自由度と免震への適用), 日本建築学会構造系論文集, No.483, pp.71-79
- 17) Han, T. Y. et al. (1983): An open boundary condition for incompressible stratified flows. : J. Comp. Phys., 49 : pp.276-297
- 18) Baker,G.R.,Merion,D.I. and Orszag,S.A.(1981) : Application of a generalized vortex method to nonlinear free-surface flows : Proc. of 3rd Int. Conf. on Numerical Ship Hydro. : pp179-191,
- 19) Vinje,T. and Brevig,P.(1981) : Nonlinear Ship Motions, Proc. of the 3rd. Int. Conf. on Num. ShipHydro. : ppIV-3-1 IV-3-10
- 20) 谷澤克治(1990): 境界要素法による波浪中 2 次元浮体の非線形シミュレーション法について,日本造船学会論文集, 第 168 号, pp221-226
- 21) Sen,D. (1993) : Numerical simulation of motions of two-dimensional floating bodies, Journal of Ship Research, Vol.37, pp307-330
- 22) Cao,Y.,Beck,R. and Schultz,W.W. (1994) : Nonlinear motions of floating bodies in incident waves, Proc. of 9th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Kuju,Oita : pp33-37
- 23) 池末俊一, 石井元悦, 熊本直樹, 日下理, 大輝聡, 上田茂(2004) : 浮力利用型人工地盤の鉛直地震動作用時における安全性に関する検討, 海洋開発論文集, 第 20 巻, pp1293-1298

### 3 提案した計算法に関する種々の検証

#### 3. 1 緒言

自由表面を有する流体の問題を考える場合、壁面は境界条件を与える重要な要素である。また、移動する壁面に対する自由表面の応答精度は、水線面を有する浮体などの構造物に対する流体力を評価する場合に重要である。

今回提案する手法は、壁面及び自由水面の干渉を時刻歴にて計算する非線形計算法である。また、自由表面運動についても壁面や底面における境界条件と流体の連続式を満たすよう時刻歴の非線形計算が行われる。従って、図 2.1.1 に示したように線形自由表面の仮定では評価出来ないような浮体運動を評価することができる。しかし、移動するような壁面に対する自由表面応答が精度良く計算出来ない場合には、構造物に作用する流体力が適正に評価できず大きな精度低下が懸念される。そこで、本章では移動する壁面に対する自由表面応答について計算を行い、その精度を検証した。

また、今回提案した計算手法の大きな特徴は、従来構造運動計算にて用いられてきた Newmark- $\beta$  法や CFD に用いられてきた CIP 法を自由表面運動計算に新たに適用することで計算精度や安定性の向上を図った点である。

ここに、Newmark- $\beta$  法による自由表面運動の時間発展手法は、次タイムステップにおける状態量を時間発展式に付加することで自由表面運動の計算精度及び安定性向上を図った新たな方法である。この方法では、現タイムステップのみでなく次タイムステップにおける状態量自体についても連続式から定まる境界値問題を満たすよう計算が行われる。従って、計算領域の体積保存性に関しても、単純なオイラー法に比べて大幅な精度向上が期待できる。

一方、CIP 法による自由表面速度ポテンシャルの時間発展手法は、自由表面速度ポテンシャルの時間発展式が自由表面接線方向へ移流される形となっている点に着目した新たな方法である。一般には、自由表面上の速度ポテンシャル微分値として中央差分近似による計算が用いられるが、自由表面上節点の運動方向がその接線方向に卓越するような場合には計算が破綻するケースがある。これは、移流問題における中央差分の数値的不安定性が原因であることは 2. 9 に述べたとおりである。CIP 法は、このような移流問題に対し

て2点間の情報を参照するだけで数値拡散の影響を極力排除しつつ、安定した波形移動を行うことのできる手法である。これを、自由表面速度ポテンシャルの時間発展計算に組み込むことで、大きな水面運動を伴う計算においても計算の安定性向上が図れる。

本章では、今回提案したこれらの手法による効果についても、実際に計算を行い確認することとした。まず、Newmark- $\beta$ 法を適用した効果については矩形タンク内のスロッピング計算により検証を行った。また、CIP法を適用した効果についてはダムブレイク（水柱崩壊）計算による検証を行った。

### 3. 2 移動壁と自由表面の干渉問題による検証

#### 3. 2. 1 計算の概要

移動壁面と自由表面の干渉問題を検証するための計算モデルを図 3.2.1 に示す。この計算モデルは、ピストン型造波板を有する造波水槽を模擬したものである。計算領域としては、水槽長さを造波する波長 $\lambda$ の4倍とし、計算領域の左端には造波板を模擬した移動壁要素を設けた。計算では、この移動壁要素に水平方向の強制的運動を与え、その際の自由表面運動について時刻歴計算を行った。また、計算領域の右端には反射波を低減するための波減衰領域を1波長分設けた。この波減衰領域では、2. 1 0に示したように自由表面における速度ポテンシャル及び鉛直方向節点速度の時間発展式に対して、次式のように減衰項を付加した形で計算を行った。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(u^2 + w^2) - g\eta - \nu(X_e)(\phi - \phi_e) \quad (3-2-1)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nu(X_e)(\eta - \eta_e) \quad (3-2-2)$$

ここに、 $\phi_e$ 、 $\eta_e$ は速度ポテンシャル、自由表面形状の目標値であり、各々に0.0の値を代入し計算を行った。また、減衰係数 $\nu(X_e)$ は減衰領域

$$X_{e0} = 3\lambda \leq X_e \leq X_{e1} = 4\lambda \quad (3-2-3)$$

内で定義される次式の関数である。

$$\nu(X_e) = \alpha_e \left( \frac{X_e - X_{e0}}{\beta_e \lambda} \right)^2 \quad (3-2-4)$$

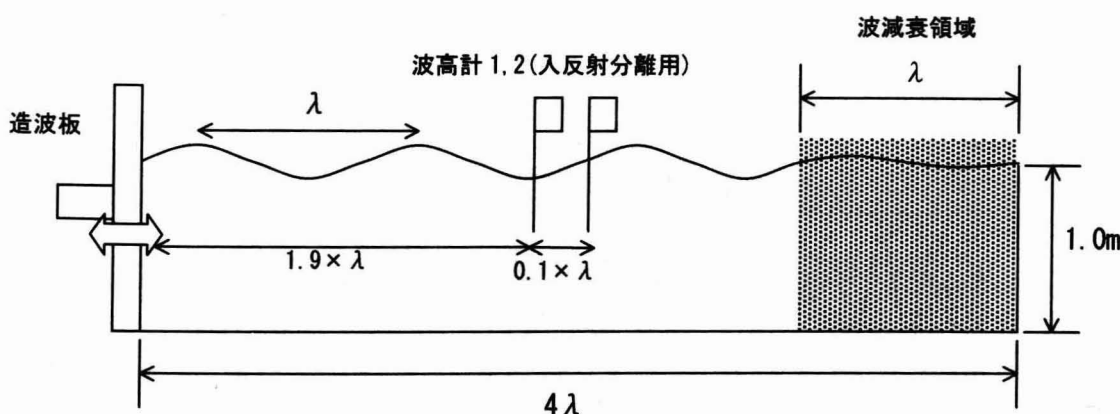


図 3.2.1 計算モデル

ここに、 $\lambda$ は造波する波の波長である。また、 $\alpha_e$ は減衰強さ、 $\beta_e$ は減衰領域長さを調節するパラメータであり、今回の計算では $\alpha_e = 1.0$ 、 $\beta_e = 1.0$ として計算を行った。図 3.2.2 に、減衰係数 $\nu(X_e)$ の計算領域における分布を示しておく。

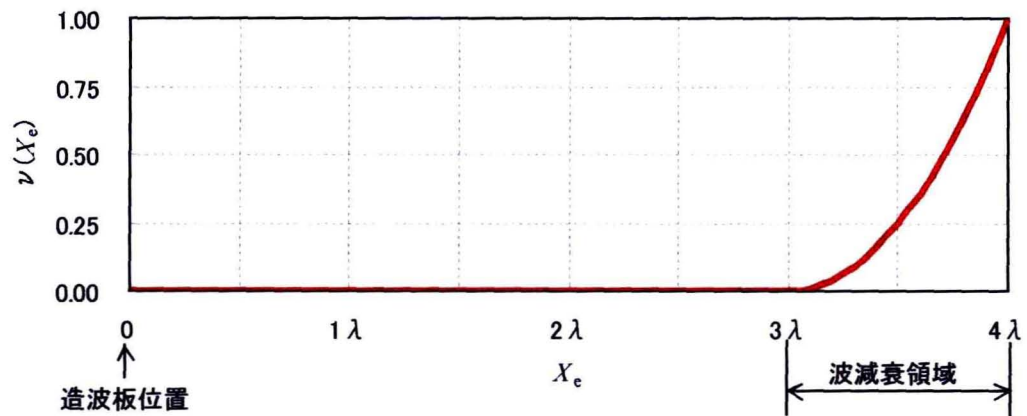


図 3.2.2 減衰係数  $\nu(X_e)$  の分布



### 3. 2. 2 微小振幅波領域での計算

まず、目標波高を  $H=0.01\text{m}$  に固定して造波板を正弦加振した場合の計算を行った。<sup>1)</sup> また、造波した波の波形勾配  $H/\lambda$  は  $0.0002\sim 0.0095$  とした。計算ケースを表 3.2.1 に示す。なお、計算では、水面・底面要素を計算領域全長の 80 分割、側壁要素を計算領域高さの 10 分割とし計算を行った。計算では、2 で述べた Newmark- $\beta$  法による時間発展計算と自由表面上速度ポテンシャルの CIP 法による時間発展計算を用いた。

表 3.2.1 計算ケース(波高  $H=0.01\text{m}$  の場合)

No	水深:h(m)	波高:H(m)	波周期:T(s)	波長: $\lambda$ (m)
1	1.00	0.01	16.01	50.00
2	1.00	0.01	10.46	32.56
3	1.00	0.01	6.87	21.20
4	1.00	0.01	4.56	13.81
5	1.00	0.01	3.09	8.99
6	1.00	0.01	2.18	5.85
7	1.00	0.01	1.62	3.81
8	1.00	0.01	1.27	2.48
9	1.00	0.01	1.02	1.62
10	1.00	0.01	0.82	1.05

図 3.2.3 に計算結果の時刻歴波形の一例を示す。計算では、図に示すように造波板の加振について緩起動を行っている。この図より、本計算にて造波板の運動に付随する水面変動、及びそれに伴う水面波の伝播が表現されていることが分かる。

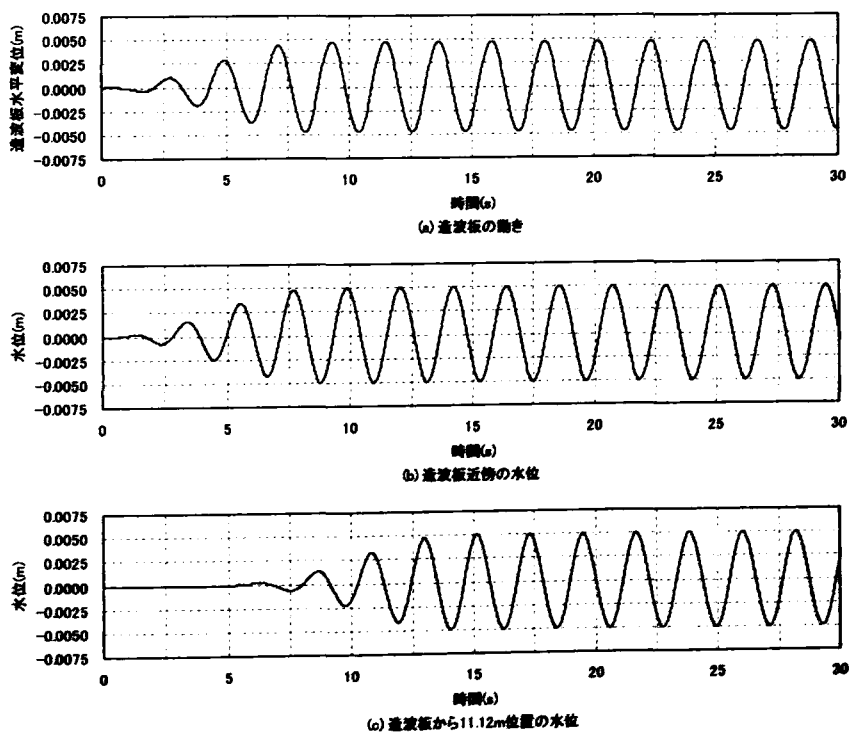


図 3.2.3 計算結果の時刻歴波形の一例 ( $h=1.0\text{m}$ ,  $H=0.01\text{m}$ ,  $T=2.18\text{s}$ )

この計算結果より、造波周期、造波波高、造波板振幅の関係を図 3.2.4 のように整理した。また、図 3.2.4 には次式で示される造波特性関数による理論値<sup>2)</sup>も併記した。

$$\frac{H}{2e} = \frac{4\sinh^2(2\pi h/\lambda)}{4\pi h/\lambda + \sinh(4\pi h/\lambda)} \quad (\text{ピストン型造波板の場合}) \quad (3-2-5)$$

ここで、 $H$  は造波波高、 $e$  は造波板の片振幅である。図に示すとおり、理論値と計算値は良好な一致を示しており、線形領域での移動壁面に対する自由表面応答について精度良く計算が出来ているといえる。

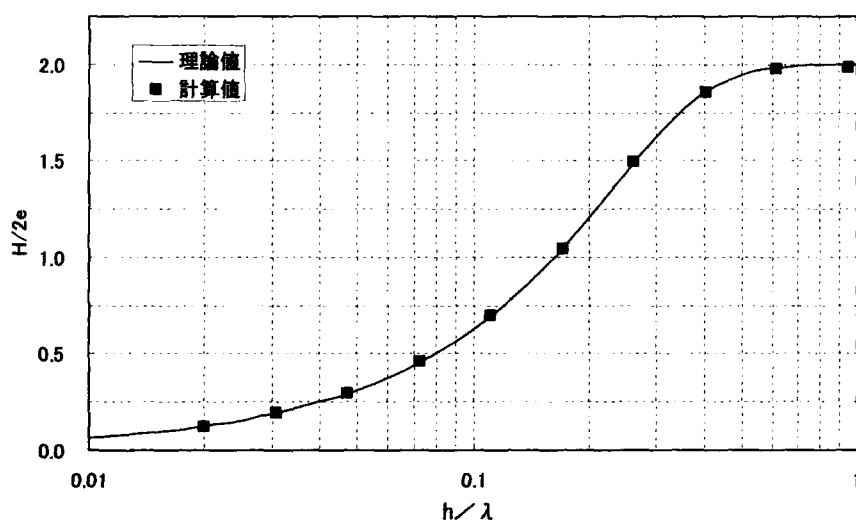


図 3.2.4 造波効率に関する理論値と計算値の比較

次に、波減衰領域による消波効果について述べる。ここで、本計算では  $0.1\lambda$  だけ離れた 2 点における水面変動を記録している。これらの時刻歴波形から合田の入反射分離法により波減衰領域からの反射率を計算した。この計算結果を図 3.2.5 に示す。

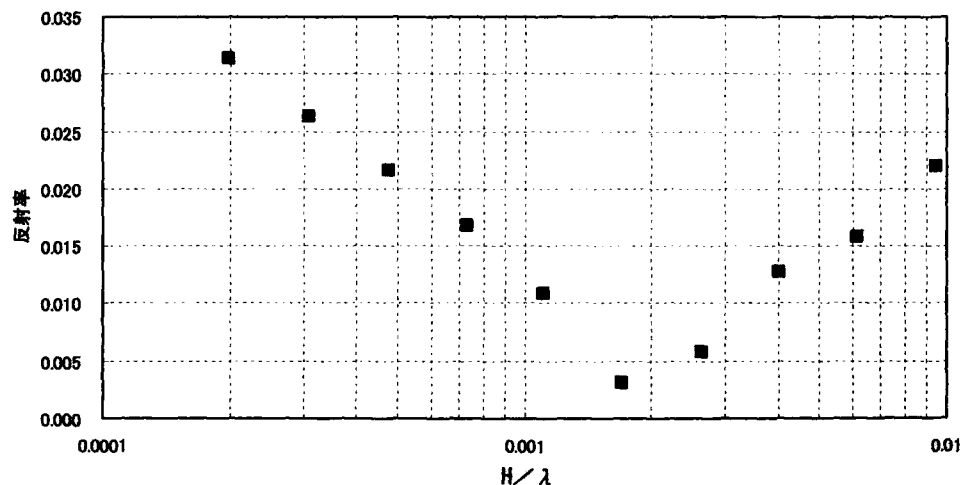
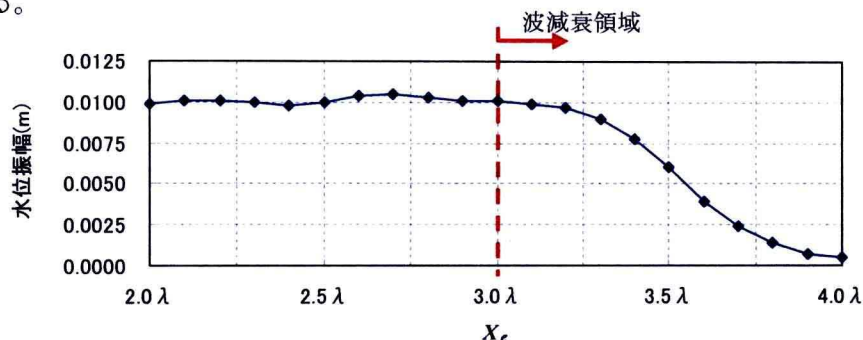
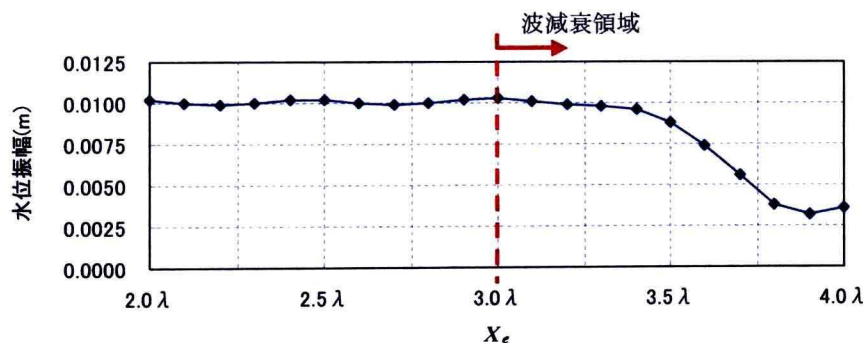


図 3.2.5 計算領域境界の反射率 (波減衰領域長さ: 1 波長分, 減衰強さ:  $\alpha_e=1.0$ )

この図より、入射波の波形勾配  $H/\lambda$  が  $0.002 \sim 0.01$  の領域では、波形勾配が大きくなるほど消波効果が低くなることがわかる。これは図 3.2.6-(a)に示すように、入射波の波形勾配が大きい場合は波減衰領域における波高変化が急となり、波減衰領域自体からの反射波が大きくなるためである。一方、入射波の波形勾配  $H/\lambda$  が  $0 \sim 0.002$  の領域では、波形勾配が小さくなるほど消波効果が低い傾向にある。これは図 3.2.6-(b)に示すように、波形勾配が小さい場合は入射波の波高変化が緩やかとなり、計算領域端部への到達波による反射が大きくなるためである。ただし、造波条件の違いで消波効果に差異が生ずるものの、今回設定した波減衰領域により計算領域からの反射波を概ね 97%以上カットできていることがわかる。



(a) 波形勾配が大きい場合( $H/\lambda = 0.0095$ )



(b) 波形勾配が小さい場合( $H/\lambda = 0.0002$ )

図 3.2.6 波減衰領域における波高の変化  
(波減衰領域長さ: 1 波長分, 減衰強さ:  $\alpha_e = 1.0$ )

ここで、波減衰領域の特性をみるために、追加ケースとして波減衰領域長さを波長の 1.25 倍、1.50 倍とした場合の反射率計算を行った。その結果を図 3.2.7 に示す。図より、波形勾配が  $0.001$  以下の場合には、波減衰領域を長くするほど消波効果が高いことが分かる。これは、入射波が通過する波減衰領域が長いほど計算領域端部における到達波の波高が小さくなり、反射波が低減されるためである。一方、波形勾配が  $0.001$  以上の場合には、消波効果に対する波減衰領域長さの影響が小さい。これは前述したように、波形勾配が大きい

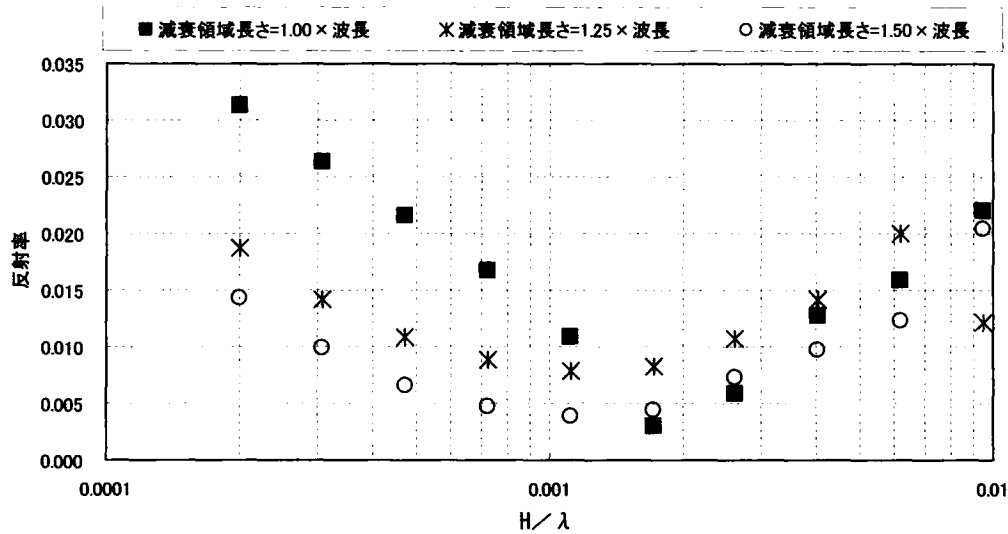


図 3.2.7 波減衰領域長さの影響 (減衰強さ:  $\alpha_e=1.0$ )

場合は、計算領域端部へ到達する前に波減衰領域自体から反射波が発生するためである。従って、造波する波によっては、波減衰領域を長くしてもさほど消波効果が向上しない場合も有る。これらの結果より、実用上は波減衰領域の長さを 1 波長程度確保しておけば十分であるが、波形勾配 0.001 以下のケースなどでは 1 波長より若干長めの波減衰領域を設けることで、より一層の反射波低減効果を期待できるものと考えられる。

次に、減衰強さ  $\alpha_e$  を 0.75, 1.25, 1.50 とした場合における計算境界からの反射率について、図 3.2.8 に示す。計算結果より、一概に減衰強さが大きいほど反射波の低減効果が向上するとはいえないことが分かる。例えば、減衰強さ  $\alpha_e=1.50$  の場合でも、波形勾配が 0.002 以上の場合には、その他のケースに比べて消波効果が最も低い結果となっている。一方、減衰強さが一番小さい  $\alpha_e=0.75$  の場合でも、波形勾配が 0.003 以上の場合には、 $\alpha_e=1.00, 1.25$  及び 1.50 の場合に比べて反射波の低減効果が高くなる。これは、波減衰強さを小さくすることで、波形勾配の大きい場合に発生していた波減衰領域自体からの反射波が低減されたためである。従って、波減衰領域における波減衰強さ  $\alpha_e$  は 1.00 程度で十分であるものの、波形勾配 0.001 以下の場合には 1.00 より大きめの値、波形勾配 0.003 以上の場合には 1.00 より小さめの値を設定することでより一層の反射波低減効果を期待できるものと考えられる。

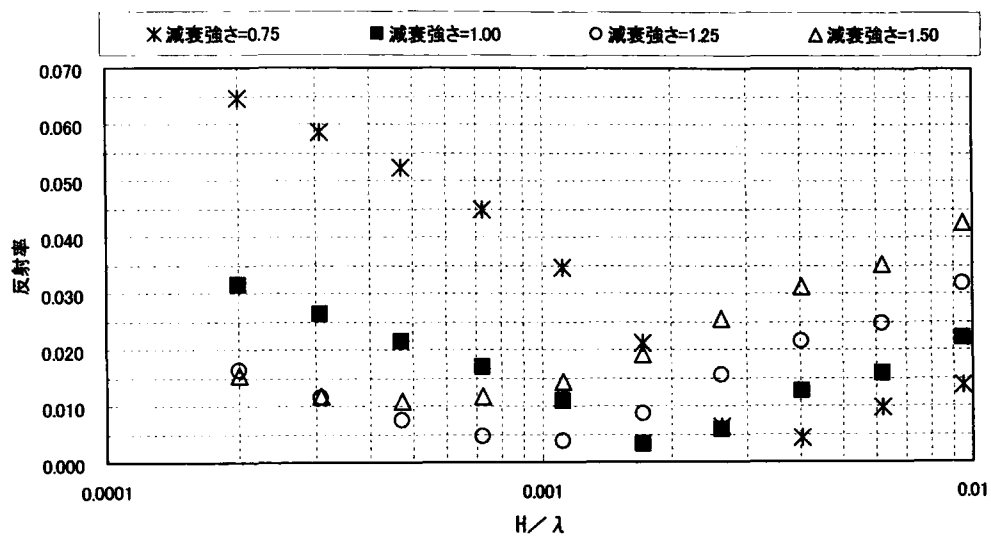


図 3.2.8 波減衰強さの影響 (波減衰領域長さ : 1 波長分)

### 3. 2. 3 有限振幅波領域での計算

前節にて、微小振幅波（線形波）の領域における移動壁と自由表面の干渉問題が精度良く計算可能なこと、及び波減衰領域を設けることにより計算領域境界からの反射波をほぼ消波可能なことを確認した。本節では、微小振幅波理論で省略される非線形項の影響を含んだ有限振幅波の領域において、造波板を模擬した移動壁と自由表面の干渉問題の計算を行い、その精度を検証した。

ところで、微小振幅波の場合は造波板を単に正弦加振すればきれいな波形が得られるが、有限振幅波の場合には造波板を単純に正弦加振すると波形の遷移領域が発生する。そこで、造波板を微小振幅波の適用範囲外における大きな振幅で正弦加振した場合について、水面応答を計算し、実験との比較を行った。図 3.2.9 に計算モデルを示す。計算条件は、H.Multer<sup>3)</sup>が行った水槽試験と同じ条件の、水深 0.3048m、造波板加振周期 2.31s、造波板加振振幅 0.1016m とした。また、計算では水面・底面要素を 160 分割、側壁要素を 10 分割とした境界要素を用いた。

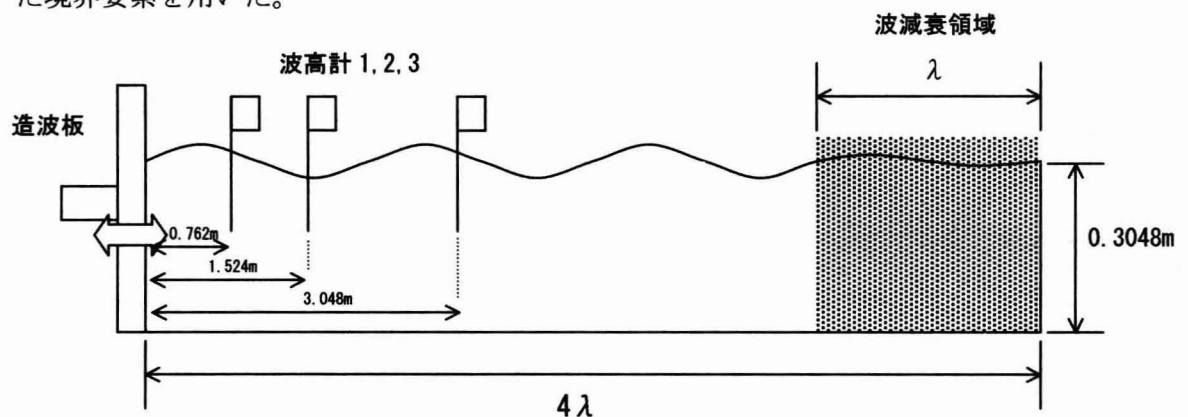
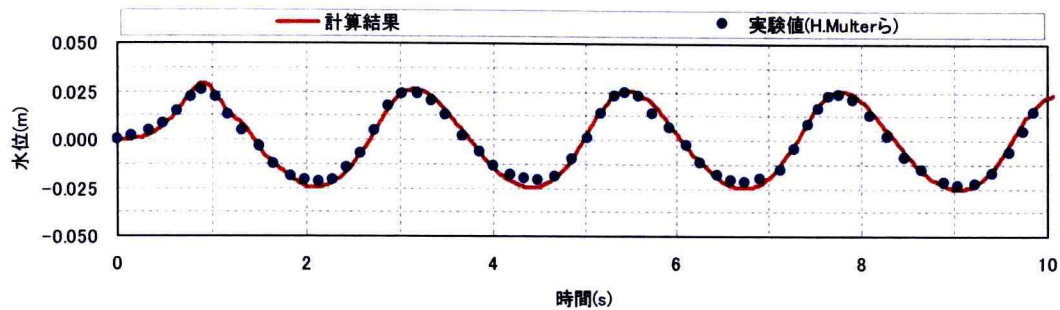


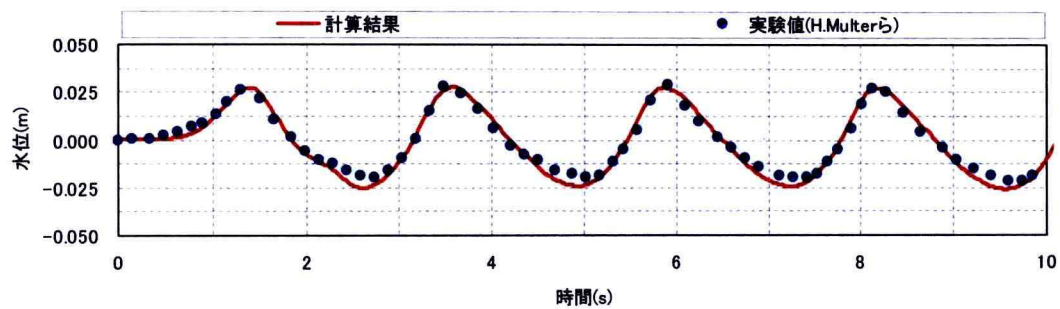
図 3.2.9 計算モデル

計算結果及び H.Multer<sup>3)</sup>の実験値との比較を図 3.2.10 に示す。まず、造波板から 0.762m と近い位置では、実験・計算共に正弦波と比較するとやや前傾した波形となっている。造波板から 1.524m の位置では、更に波形が前傾していく様子が実験・計算共に現われている。また、これらの計測位置における実験値と計算値は概ね良好な一致を示している。造波板から更に離れた 3.048m 位置については、山が尖って谷がやや平坦となるような波形形状へと遷移している。ここで、谷の部分では計算値が実験値に比べてやや低めの水位となっているものの、全体的に両者の値は概ね良好な一致を示している。これらの結果より、

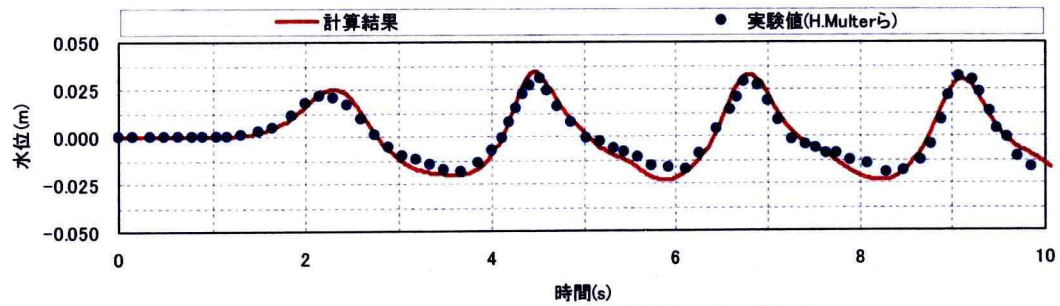
微小振幅波の領域外においても、本計算法にて移動壁と自由表面の干渉問題が精度良く計算できていることがわかる。



(a) 造波板から 0.762m 位置の水面波形



(b) 造波板から 1.524m 位置の水面波形



(c) 造波板から 3.048m 位置の水面波形

図 3.2.10 微小振幅波領域外で造波板を正弦加振した場合の水面波形

### 3. 3 スロッシング及びダムブレイク問題による検証

#### 3. 3. 1 スロッシング計算による時間発展手法の精度比較

本節では、自由表面運動計算における、時間発展手法の違いによる精度の比較を行う。題材としては、池田ら<sup>4)</sup>の検討を参考として、スロッシング問題を取り上げた。計算条件を図 3.3.1 に示す。

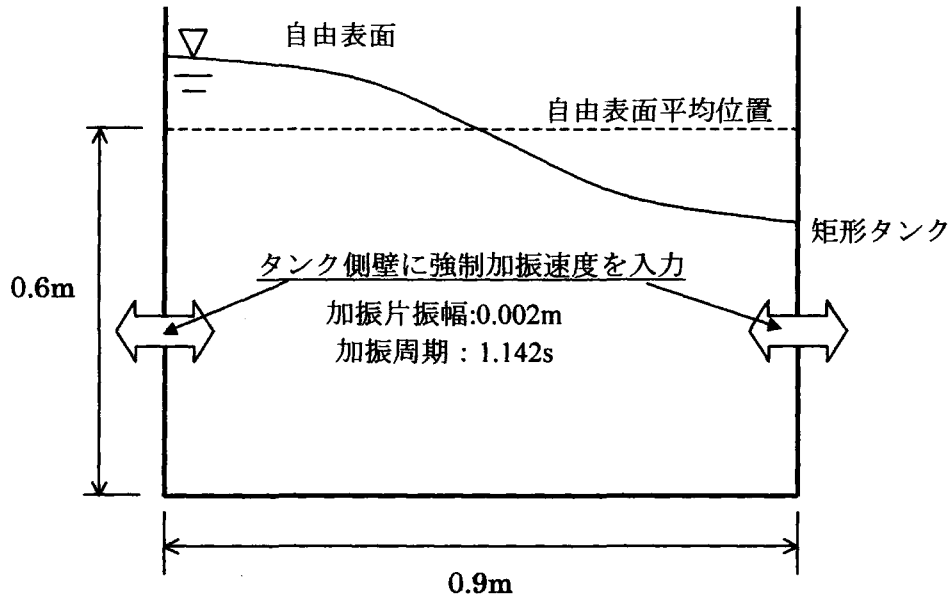


図 3.3.1 矩形タンク内スロッシングの計算条件

計算では、幅 0.9m、水深 0.6m の矩形タンクを考えると、タンク全体を水平加振した際の自由表面応答を計算した。水平加振の方法としては、矩形タンク側壁の境界要素節点に正弦加振速度を強制条件として与える方法を用いた。水槽の加振片振幅については、0.002m とした。

まず、オイラー法と Newmark- $\beta$  法を用いて計算を行い、時間分割幅  $dt$  を周期の  $1/20$ ,  $1/40$ ,  $1/80$ ,  $1/160$ ,  $1/320$  としたときの水面応答の違いについて検討を行うこととした。ここで、水面運動を線形と仮定した場合の自由水面の固有周期は次式のように表される。

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g \cdot \alpha \cdot \tanh \alpha h}} \quad \alpha = \frac{(2n-1)\pi}{b} \quad (3-3-1)$$

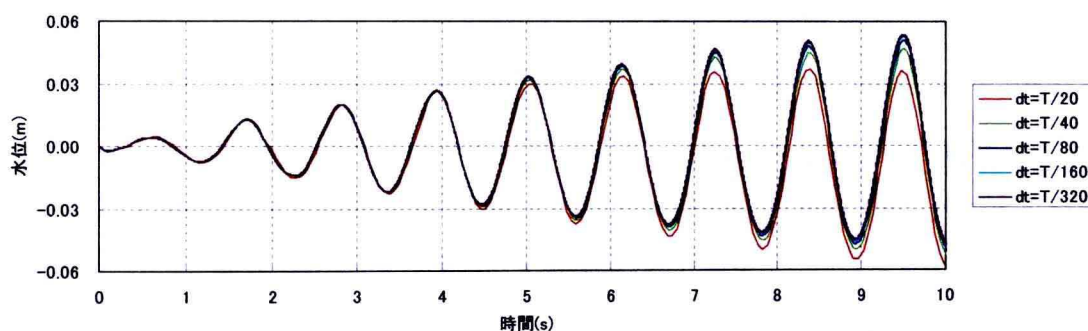
ここに、 $g$  は重力加速度、 $h$  は水深、 $b$  は水槽幅、 $n$  はスロッシングモードの次数である。式(3-3-1)に図 3.3.1 の計算条件に当てはめた場合、1 次スロッシングの固有周期は 1.09s と



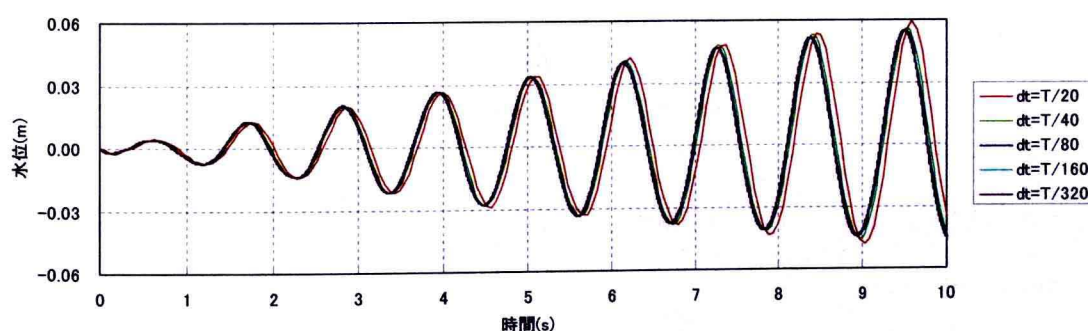
なる。本計算では、水槽への加振周期  $T$  を  $1.142\text{s}$  として 1 次モードのスロッシングに近い条件を入力し、自由表面の応答を検討することにした。なお、本計算における境界要素については、自由表面、水槽側壁及び水槽底面を各々 10 分割した。このように、要素の分割数を少なくしたのは、これ以上の要素分割数で計算した場合、時間分割幅を周期の  $1/20$  としたオイラー法の計算が発散したためである。

水槽壁面近傍における加振開始から 10 秒後までの水位波形計算結果を図 3.3.2 に示す。計算結果より、オイラー法では時間分割幅により計算結果が大きく異なっていることが分かる。特に、時間分割幅  $dt=T/20$  のケースについては  $dt=T/320$  の場合と比べて波形が大幅に異なっており、加振後 9.5 秒付近でのピーク水位は 35 パーセントの差がでている。また、 $dt=T/40$  としても、 $dt=T/320$  の場合の計算結果とは隔たりがある。

これに対し、Newmark- $\beta$  法を用いた場合には  $dt=T/20$  の場合を除いて、水位波形が時間分割幅によらずほぼ一致している。このことから、今回導入した自由表面運動の Newmark- $\beta$  法による時間発展手法により、時間発展計算の精度がかなり向上していることが分かる。



(a) オイラー法による計算結果



(b) Newmark- $\beta$  法による計算結果

図 3.3.2 時間分割幅の違いによる水位波形比較

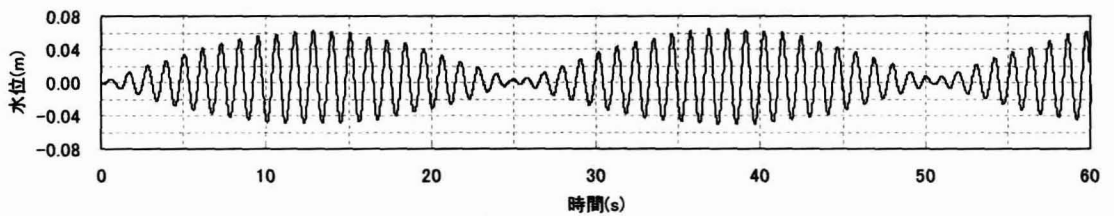
次に、図 3.3.1 の条件において時間分割幅を  $dt=T/80$  とし、60 秒間加振した場合の計算を行った。境界要素の分割は先ほどの計算条件よりも細かい分割とし、自由表面を 45 分割、水槽側壁を 30 分割、水槽底面を 22 分割とした。水槽側壁付近の水位計算結果を図 3.3.3 に示す。両者の計算とも、水位の波形にうなりの現象が再現されていることがわかる。ただし、うなりの周期については両者で 1s 程度の差が生じており、時間発展計算手法の違いにより自由表面運動の長期的変動においても計算精度の違いが生じている。

ここで、うなりの周期は、線形の場合には 1 次固有周波数と加振周波数の差をとったものの逆数となる。ただし、水面応答が大きくなり、その非線形性が無視できない場合、うなりの周期は線形の場合と乖離してくる。David Hill ら<sup>5)</sup>は、3 次オーダーの自由表面応答方程式をベースとして矩形タンクにおける非線形うなり周期の計算式を導いている。その計算式は以下の通りである（導出の過程については、David Hill ら<sup>5)</sup>の文献を参照）。

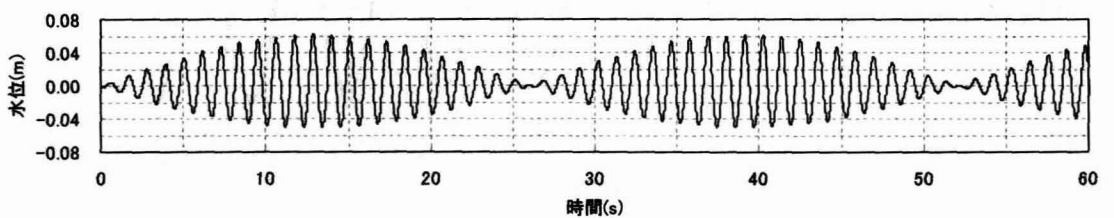
$$T_{bt} = \left\{ \frac{2K(m_{bt})}{n_{bt}} \right\} / \left\{ \left( \frac{a_{acc}}{L_{tk}} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{g}{L_{tk}}} \right\} \quad (3-3-2)$$

$$n_{bt}^2 = \frac{\lambda_{bt}^2}{16} (A_c^2 - A_a^2) (A_d^2 - A_b^2) \quad (3-3-3)$$

$$m_{bt}^2 = \frac{(A_b^2 - A_a^2) (A_d^2 - A_c^2)}{(A_c^2 - A_a^2) (A_d^2 - A_b^2)} \quad (3-3-4)$$



(a) オイラー法による計算結果



(b) Newmark-β法による計算結果

図 3.3.3 60 秒間加振した場合のタンク側壁近傍の水位波形

ここに、 $T_{bt}$ はうなりの周期、 $a_{acc}$ はタンクの加振片振幅、 $L_{tk}$ はタンク幅、 $g$ は重力加速度、式(3-3-2)の $K()$ は第1種完全楕円積分関数である。式(3-3-3)及び(3-3-4)の $A_a^2$ 、 $A_b^2$ 、 $A_c^2$ 、 $A_d^2$  ( $A_a^2 < A_b^2 < A_c^2 < A_d^2$ ) については、 $A_{bt}^2$ に関する次式の4次方程式の解である。

$$(A_{bt}^2)^4 - \frac{4\Delta_{bt}}{\lambda_{bt}}(A_{bt}^2)^3 + \frac{4\Delta_{bt}^2}{\lambda_{bt}^2}(A_{bt}^2)^2 - \frac{16\beta_{bt}^2}{\lambda_{bt}^2}A_{bt}^2 = 0 \quad (3-3-5)$$

式(3-3-5)の $\Delta_{bt}$ は、タンク1次固有円振動数 $\omega_{1st}$ 、タンク加振円振動数 $\omega_{acc}$ 及びタンク加振片振幅 $a_{acc}$ 、タンク幅 $L_{tk}$ を用いて、次式によって計算される値である。

$$\Delta_{bt} = \frac{\omega_{1st} - \omega_{acc}}{(a_{acc}/L_{tk})^3 \sqrt{g/L_{tk}}} \quad (3-3-6)$$

また、式(3-3-3)及び(3-3-5)に登場する $\lambda_{bt}$ 、 $\beta_{bt}$ は、タンク加振円振動数 $\omega_{acc}$ 及び $h_{tk}$  (=タンク水深/タンク幅)を用いて、次式によって計算される値である。

$$\lambda_{bt} = \omega_{acc} \pi^2 \frac{\cosh(6\pi h_{tk}) - 6\cosh(4\pi h_{tk}) - 15\cosh(2\pi h_{tk}) - 16}{-8\cosh(6\pi h_{tk}) + 16\cosh(4\pi h_{tk}) + 8\cosh(2\pi h_{tk}) - 16} \quad (3-3-7)$$

$$\beta_{bt} = \frac{2\omega_{acc}}{\pi} \tanh(\pi h_{tk}) \quad (3-3-8)$$

図 3.3.1 に示した矩形タンクの条件について、式(3-3-2)～(3-3-8)の David Hill の方法で計算したうなり周期の加振振幅による変化を図 3.3.4 に示す。加振片振幅が 0.0005m 以下の領域では、David Hill の理論値と線形理論によるうなり周期の値は 24.09s で一致している。しかし、加振片振幅が 0.001m 程度の領域から、加振片振幅が大きくなるにつれうなり周期も長周期化する傾向となっている。ここで、図 3.3.3 に示した自由表面応答の計算結果から算出したうなり周期の値と、David Hill の理論値を比較したものを表 3.3.1 に示す。

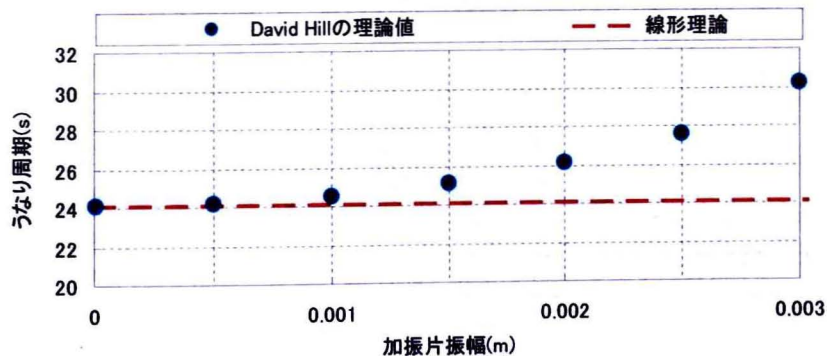


図 3.3.4 タンク加振振幅によるうなり周期の変化  
(David Hill の理論値, 矩形タンク幅: 0.9m, 水深: 0.6m, 加振周期 1.142s)



表 3.3.1 うなり周期の計算結果  
(矩形タンク幅：0.9m, 水深：0.6m, 加振片振幅：0.002m, 加振周期 1.142s)

計算方法	うなり周期計算結果	理論値との誤差
David Hill <sup>6)</sup> の理論値	26.09 s	—
Newmark- $\beta$ 法での計算結果より算出	26.04 s	0.20%
オイラー法での計算結果より算出	25.16 s	3.57%

うなりは加振周期に対して長周期の応答であるため、時間発展計算の誤差が大きい場合にはその誤差が蓄積され、正確なうなりが再現されない。その点でいえば、オイラー法を用いる自由表面運動計算は、うなりの周期が David Hill の理論値に比べて 3.57% 短い結果となり精度的に問題のあることがわかる。これに対し、本論文にて提案した Newmark- $\beta$ 法を用いる自由表面運動計算では、うなりの周期が David Hill の理論値に対して 0.2% の誤差に収まっており、うなりの現象が精度良く再現できている。

次に、水槽内における自由表面の平均位置についてその時刻歴変化を図 3.3.5 に示す。本来ならば、非圧縮性流体の体積保存則により自由表面の平均位置は時間が経過しても初期の自由表面位置から変化しないはずである。しかし、オイラー法での計算結果では時間の経過とともに自由表面の平均位置が増加していく形となっている。なお、オイラー法については  $dt=T/160$  及び  $dt=T/320$  のときの結果も併記したが、時間刻みを細かくした条件下でも自由表面の平均位置が変化していることが分かる。これに対して Newmark- $\beta$ 法の計算結果では、 $dt=T/80$  の条件でも自由表面の平均位置がオイラー法に比べてほとんど変化していない。これは、今回提案した Newmark- $\beta$ 法による計算が、自由表面上における次タイムステップの状態量自体を連続式から定まる境界値問題を満たすように決定しているためである。従って、本計算手法は時間発展精度だけでなく流体の体積保存性をも向上させる手法であるといえる。

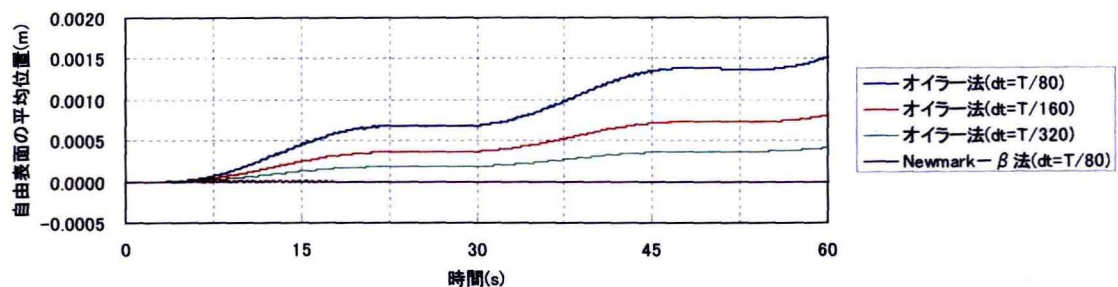


図 3.3.5 自由表面の平均位置の時刻歴変化

続いて、本計算法によるスロッシングの水面応答計算精度について、Takayama<sup>6)</sup>の実験結果と比較を行ったので以下に述べる。Takayama<sup>6)</sup>の実験条件及び本計算法による計算条件を図 3.3.6 に示す。

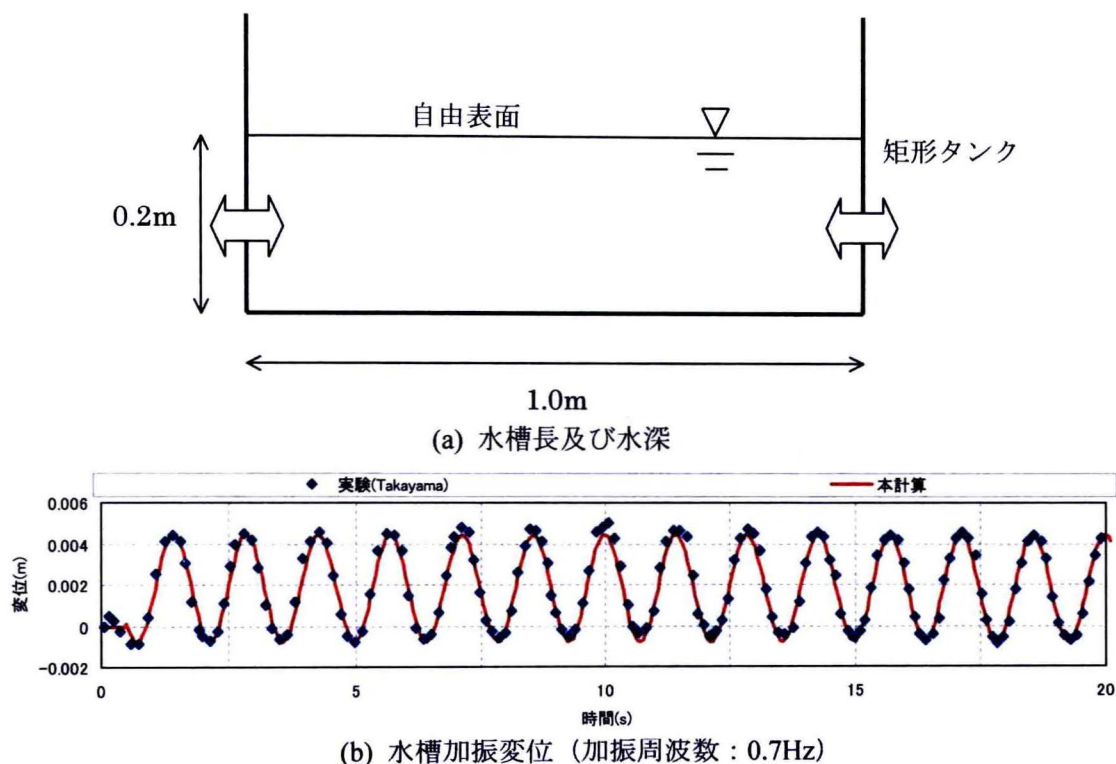


図 3.3.6 Takayama<sup>6)</sup>の実験条件及び本計算法による計算条件

水槽左側壁における水面応答について、実験値と計算結果の比較を図 3.3.7 に示す。この水槽長、水深条件での 1 次固有周波数は 0.659Hz であるので、実験・計算共に水面応答は 1 次のスロッシングモードに近い形となり加振振幅に比して大きなものとなっている。また、水深に比して水面応答が大きいいため、応答の山が高くなり谷は浅くなるという特徴が実験・計算共に現れており、両者の時刻歴波形は良好な一致を示している。

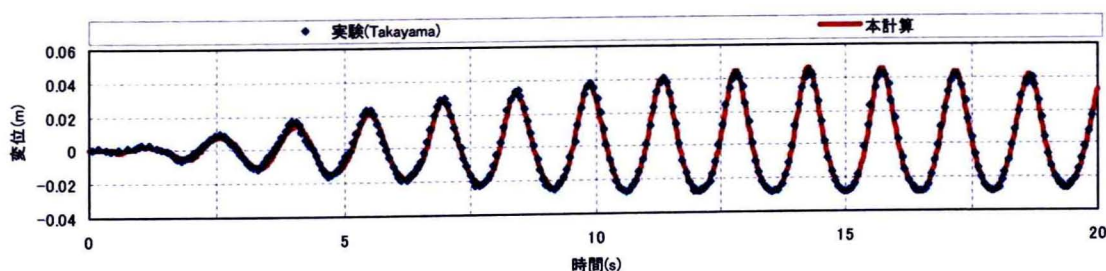


図 3.3.7 実験と本計算法の比較（水槽左側壁近傍の水面応答）

この条件で応答が最も大きくなる 15s～16s の水面形状について、図 3.3.8 に示す。水槽側壁近傍の水面高が最大となると、もう一方の側壁近傍における水面高はほぼ最小となっており 1 次のスロッシングモードに近い応答形状であることがよくわかる。また先述の通り、そのときの水面の山形状は正弦波に比べて尖り、谷形状については正弦波に比べ平坦なものとなっている。

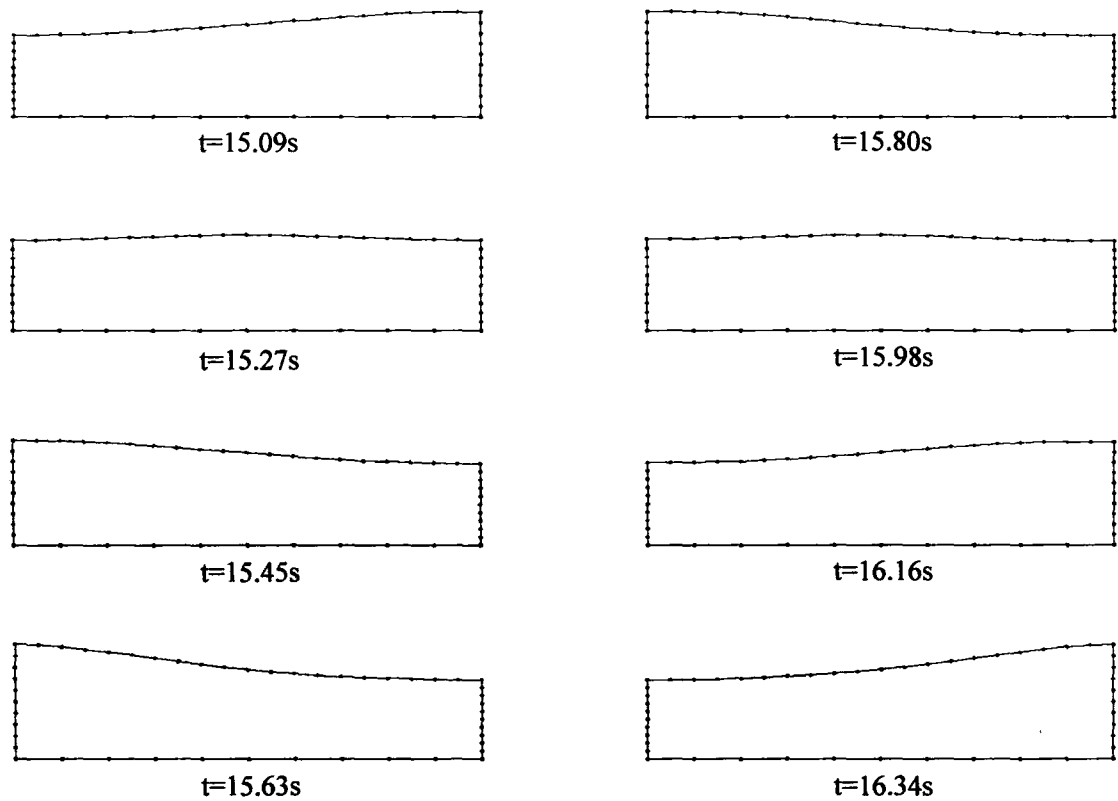


図 3.3.8 水面応答の様子（計算）

### 3. 3. 2 ダムブレイク計算による自由表面上差分手法の比較

本節では自由表面上差分手法の違いによる比較を行う。前述の通り、今回提案する計算手法の一つとして、自由表面速度ポテンシャルの時間発展式における自由表面接線方向の移流に着目した CIP 法の適用がある。この手法の計算面における利点を論じるには、自由表面上の水粒子が自由表面接線方向に移動するような問題に関するケーススタディが適している。そこで、計算対象として図 3.3.9 に示すようなダムブレイク問題を取り扱うこととする。

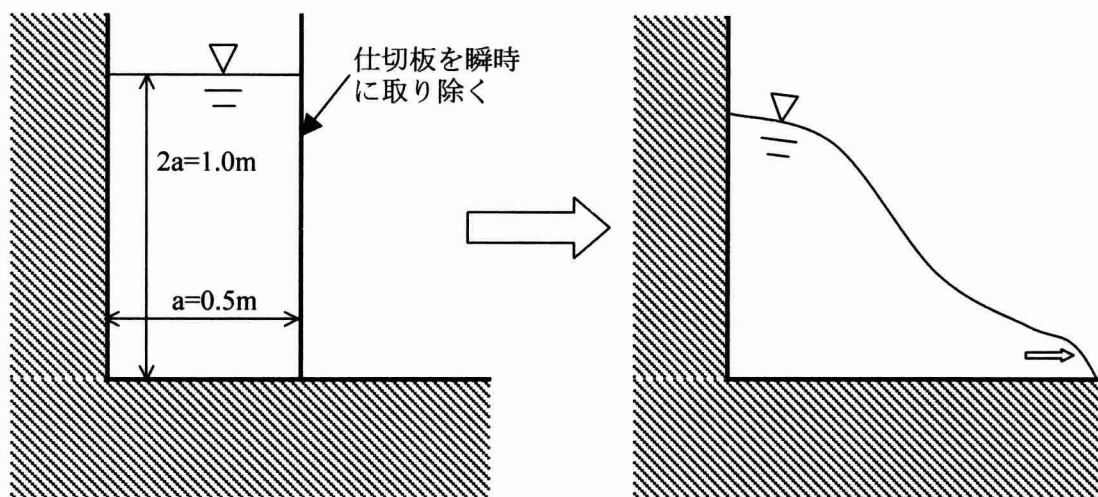


図 3.3.9 ダムブレイク（水柱崩壊）問題

このダムブレイク問題は水柱崩壊問題ともよばれ、水槽内の仕切板で仕切られたスペースに流体を貯めておき、この仕切板を瞬時に取り除いた際の流体の挙動を検討するものである。この問題については、Martin ら<sup>7)</sup>や Koshizuka ら<sup>8)</sup>により実験が行われており、VOF 法や MPS 法などのベンチマーク問題としても使用される自由表面の大変形問題である。今回の計算では、自由表面となる要素を 85 分割、水槽の左側壁及び底面を各々 30 分割とし計算を行った。また、時間発展計算には Newmark- $\beta$  法を用いた。

まず、自由表面上の速度ポテンシャル微分として中心差分を用いた場合及び CIP 法を用いた場合の、水柱崩壊の過程に関する計算結果を図 3.3.10 に示す。まず、水柱の崩壊が開始する初期段階では水柱下部の部分が押し出されるような形で自由表面の変形が進んでいく。また、上部の自由表面はこれに引きずられて下方向に沈んでいくような動きをする。この段階における自由表面の運動方向は、自由表面の法線方向が支配的である。

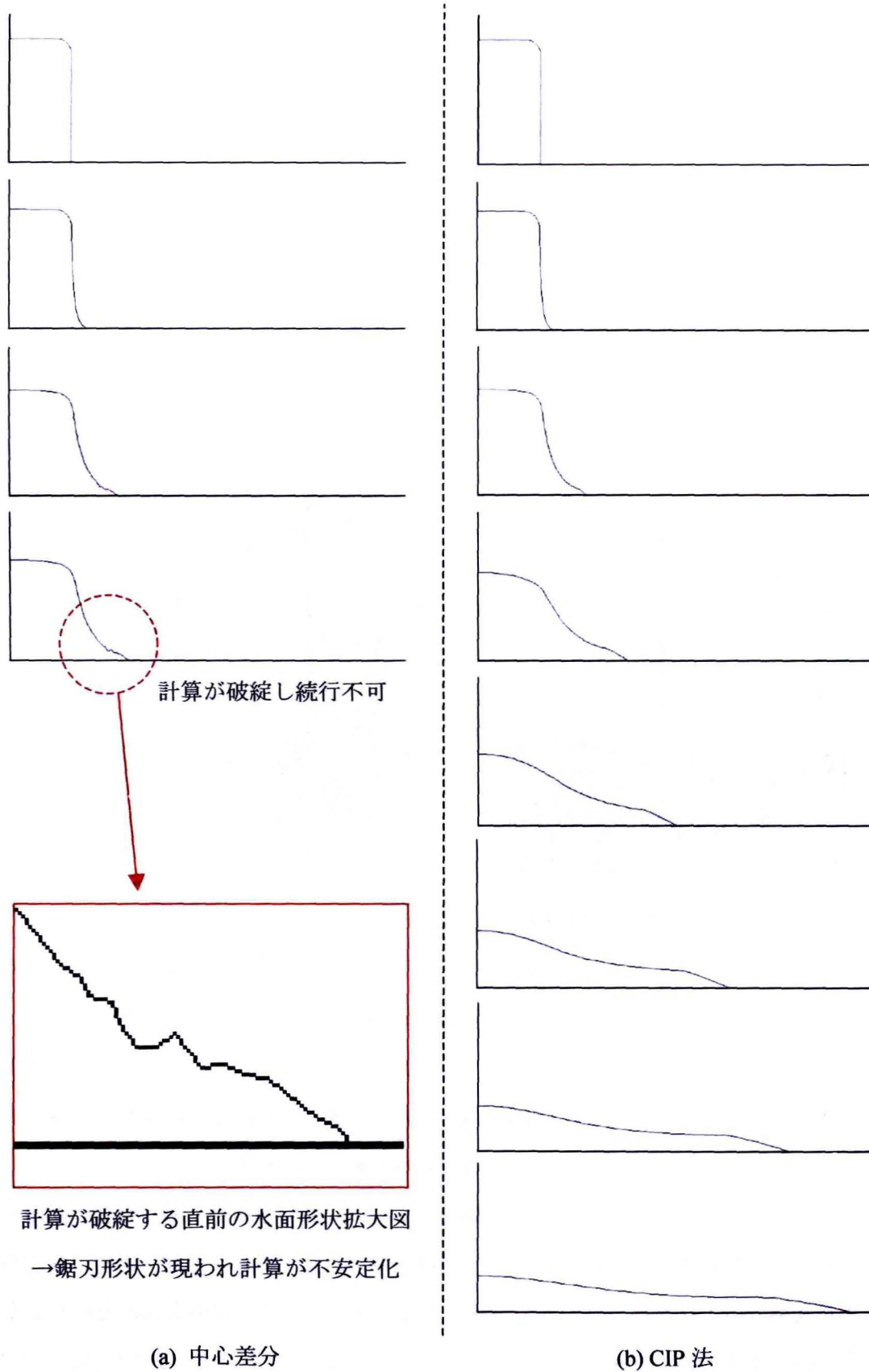


図 3.3.10 ダムブレイク計算結果（水柱崩壊の過程）



従って、この段階においては自由表面接線方向への運動が小さい分、中央差分及び CIP 法の差が現れにくいといえる。

これに対し、水柱崩壊がある程度進行した段階では水塊が水平方向へ滑るような運動をするようになる。この場合には、自由表面上の運動方向は自由表面の法線方向よりもむしろ自由表面の接線方向に卓越するようになり、中央差分と CIP 法による差が現れてくるようになる。このとき、中央差分を用いた計算法では水平速度が大きくなる水塊の先端部において鋸状の自由表面形状が現れてくる。これは、2.9 でも述べたように移流問題に中央差分を使用する際の数値的不安定性に起因するものである。一方、CIP 法を用いた計算では水塊の先端部においても数値的不安定性を生ずることなく、滑らかに自由表面形状を計算できている。

以上の結果より、自由表面形状が大変形しながら自由表面の運動方向が自由表面の接線方向に卓越するような非線形性の強い問題に対して、今回提案した CIP 法による計算法が有効であるといえる。

崩壊する水柱の先端位置について、今回の計算と既往の実験結果<sup>7)8)</sup>との比較を図 3.3.11 に示す。先端位置の動きは、計算値が実験結果に比べて若干速めのものとなっている。これは、本計算が理想流体を仮定した計算法であり、底面との粘性抵抗を考慮できない影響であると考えられる。ただし、計算値が実験値の傾向を比較的よく再現しているといえ、両者は定性的には良好な一致を示している。

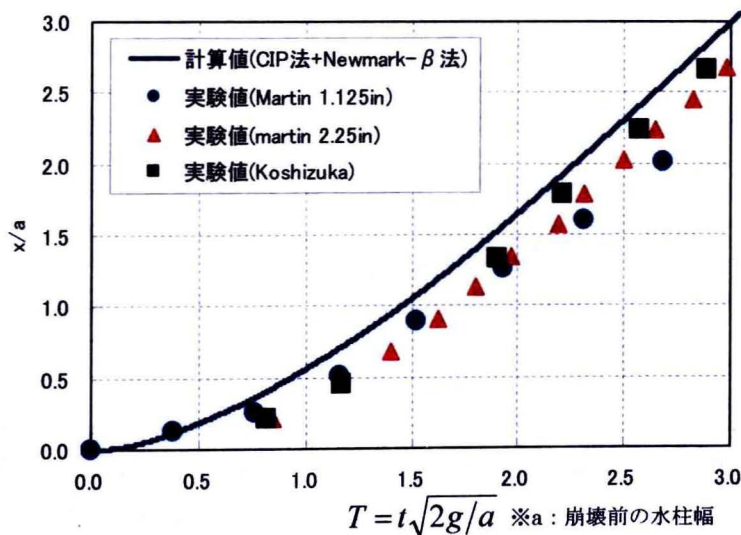


図 3.3.11 崩壊水柱の先端位置に関する計算値と実験値の比較

最後に、崩壊する水柱の体積変化率を図3.3.12に示す。水柱の崩壊が開始する初期段階、すなわち自由表面の運動方向が自由表面の法線方向に卓越している段階では、水柱の体積が全く変化していないことがわかる。これは、自由表面の法線方向速度が境界要素法にて流体の連続式を満たすよう決定されるためである。

自由表面の運動方向が自由表面の接線方向に卓越する段階になると体積の変化が生じている。この理由は、以下の通りであると考えられる。

まず、自由表面上速度ポテンシャルの時間発展式は、自由表面上に沿った接線－法線方向座標系で表現した場合、次式のようになることは2. 9で述べた。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial\phi}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial n} \right)^2 \right\} - g\eta \quad (3-3-9)$$

この式(3-3-9)において、自由表面の法線方向速度  $\partial\phi/\partial n$  の値は、連続条件を表す境界値問題（ラプラス方程式）を満たすよう境界要素法にて直接的に求められる。従って、 $(\partial\phi/\partial n)^2/2$  の値が式(3-3-9)のその他の項に対して無視できない大きさの場合は、自由表面上速度ポテンシャルも連続条件の影響を受けながら時間発展していく。しかし、自由表面の運動が接線方向に卓越する場合は、式(3-3-9)における  $(\partial\phi/\partial n)^2/2$  の影響が小さくなる。そのため、自由表面速度ポテンシャルの時間発展に対する連続条件の影響は弱まり、結果として体積保存性が低下する。

ただし、水柱が初期形状から大きく変形して水平方向に伸張する状態へと移行しても、その変化率は1.0%未満と小さく体積保存性は良好であるといえる。

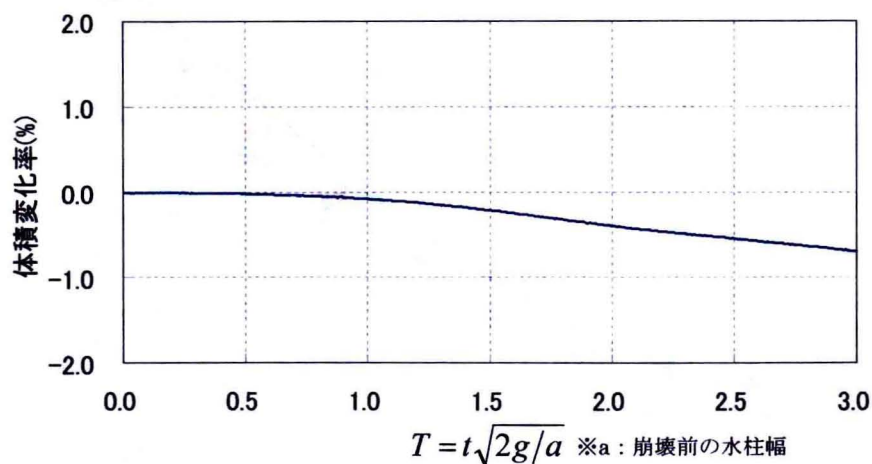


図 3.3.12 崩壊水柱の体積変化率

### 3. 4 結言

本章では、本論文で提案した計算法の中でも重要な要素である「移動壁面に対する自由表面応答の精度」、「Newmark- $\beta$ 法による時間発展手法の効果」、「CIP法による自由表面速度ポテンシャル時間発展手法の効果」について、計算を実施し検証を行った。以下にまとめを述べる。

- (1) 移動壁面に対する自由表面応答について、移動壁面にピストン型造波板を模擬した計算モデルを用い、その精度を検証した。ピストン型造波板が微小振幅波領域で正弦加振される場合について、発生する水面波高の計算値が理論値と一致することを確認した。ピストン型造波板が大きい場合については実験値との比較を行い、水面波形状の遷移状態が計算にて精度良く再現されていることを確認した。
- (2) 波減衰領域について、その消波特性に対する波減衰領域長さ・波減衰強さの影響を調べた。波減衰領域長さについては、水面波の1波長程度で十分である。ただし、波形勾配が0.001以下の場合については、波減衰領域長さを1波長より長めとすることで消波性能が向上する。また、波減衰強さについては、波形勾配が0.001以下の場合には1.00より大きめの値、波形勾配が0.003以上の場合には1.00より小さめの値とすることで、より消波性能が向上することが分かった。
- (3) 本論文で提案した自由表面運動計算へのNewmark- $\beta$ 法適用の効果について、スロッピング計算により検証を行った。時間発展精度に関して、オイラー法では時間刻みの大きさにより計算結果に明らかな差異が生じる結果となったが、本手法では時間刻みによる計算結果の差異があまり見られなかった。計算誤差の蓄積により精度良く計算することが難しいというのの周期についても、本手法を用いることで精度良く計算可能なことが分かった。また、オイラー法では時間刻みをタンク加振周期の1/320としても計算領域の体積が変動するのに対して、本手法ではタンク加振周期の1/80の時間刻みでも体積変動が発生しなかった。また、造波板を大振幅で加振する際の水面応答計算及びスロッピング計算を実施し、自由表面応答の時刻歴計算結果と既往の実験結果が一致することを確認した。
- (4) ダムブレイク計算により、CIP法による自由表面ポテンシャル時間発展手法の効果に

ついて検証を行った。その結果、大きな自由表面運動を伴うような問題についても、本手法により安定的に計算可能なことが確認できた。

## 参考文献

- 1) 池末俊一, 石井元悦, 熊本直樹, 日下理, 大輝聡, 上田茂(2004): 浮力利用型人工地盤の鉛直地震動作用時における安全性に関する検討, 海洋開発論文集, 第 20 巻, pp1293-1298
- 2) 合田良実(1990): 港湾構造物の耐波設計, 波浪工学への序説, 増補改訂版, 鹿島出版会
- 3) Roger H. Multer(1973): EXACT NONLINEAR MODEL OF WAVE GENERATOR : Journal of the HYDRAULICS DIVISION, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp.31-46
- 4) 池田洋一 他(2001): 間接 Trefftz 法によるスロッシング問題のシミュレーション, 計算数理工学論文集 Vol.1
- 5) DAVID HILL and JANNETTE FRANDSEN(2005): Transient evolution of weakly nonlinear sloshing waves : an analytical and numerical comparison, Journal of Engineering Mathematics (2005) 53: 187-198
- 6) Tomotsuka Takayama(1976): Theory of Transient Fluid Waves in a Vibrated Storage Tank, Report of the PORT & Harbour Research Institute, Vol. 15, No. 2
- 7) J.C. Martin and W.J.Moyce (1952): Phil. Trans. Roy. Soc. London A 244, 312.
- 8) S.Koshizuka H.Tamao and Y.Oka(1995): Journ. of Computational Fluid Dynamics, vol. 4, no.1, 29-46.

## 4 自由表面付流体—浮体の連成計算手法に関する検証

### 4. 1 緒言

3にて、本論文で提案した自由表面付流体に関する計算手法の妥当性を検証することができた。ただし、3での検証は壁面に強制的な運動条件を与えた場合のものであり、流体圧により壁面が運動し、その運動した壁面によって流体側の運動が変化するような相互影響については検証できていない。そこで、本章では自由表面付流体とその影響を受けて運動する壁面の連成計算手法について検証を行った。この運動する壁面として、本論文では浮体を取り上げ2. 1 1で連成計算の定式化を行っている。

ところで、自由表面流体と浮体の連成を考える上で最も簡便な方法は、現タイムステップでの流体から与えられる力のみで、浮体側の運動状態を時間発展させ、その浮体壁面上の境界条件を用いて次タイムステップでの流体の運動状態を決定する手法である。しかし、この手法では浮体の応答が安定せず、不安定な応答波形が生ずることがある。また、浮体応答の誤差の蓄積により、波が入射した後の浮体の長周期の過渡応答が実際のものと全く異なる挙動になる場合もある。これは、浮体及び流体が現タイムステップの境界条件のみで時間発展を行うため、次タイムステップにおける流体運動と浮体運動の力の釣り合いが保証されていないことに起因する。この問題に対して、本論文では、2. 1 1にてNewmark- $\beta$ 法をベースとした収束計算の手法を提案し、定式化及び計算アルゴリズムの構築を行っている。特に、本論文では流体の自由表面運動についてもNewmark- $\beta$ 法を新たに適用しており、浮体及び流体の時間発展について次タイムステップの力の釣り合いを満たすよう計算することができる。この計算アルゴリズムの妥当性を検証するため、本章では既往の浮体実験を対象として計算を行った。検証の題材としては、著者ら<sup>1)</sup>による浮桟橋の動揺低減技術に関する実験結果を用いることとした。

本章の構成として、4. 2にて著者ら<sup>1)</sup>による浮桟橋の動揺低減技術に関する実験の概要を説明した。また、4. 3では、著者ら<sup>1)</sup>が行った単純箱型浮体の波浪応答実験結果を用いて、本論文の自由表面付流体—浮体の連成計算手法の妥当性について検討した。4. 4, 4. 5では浮体にMS boardと呼ばれるフィン型の動揺低減アタッチメントを適用した場合の簡易抗力モデルを提案し、実験との比較によりその妥当性を検証した。



## 4. 2 浮桟橋の動揺低減技術に関する検討及び実験結果の概要

### 4. 2. 1 検討の背景及び MS board の概要

浮桟橋は、潮位変動に対して乾舷を一定に保つことが可能であるため、潮位変動の大きい地域で船の乗船・下船設備としてよく用いられる構造物である。しかし、桟橋自体が浮体であることから、波浪や航走波での動揺により係留系の疲労破壊などを生じる事が多々ある。また、(財)沿岸開発技術研究センター<sup>2)</sup>が実施したアンケート調査では、浮桟橋の動揺低減に対するニーズが多いという結果が得られている。特に、浮体の横揺に関しては造波減衰力が小さいため、浮桟橋の横揺固有周期と波浪や航走波の周期が一致する場合に利用者が大きな揺れを感じる。このような背景より、浮体の横揺を主とする動揺について、その低減対策が求められている。

このような浮桟橋の横揺に対する低減技術として、以下の2通りのアプローチが考えられる。

- (a) 浮体動揺の固有周期を、波浪や航走波の周期からずらす方法。
- (b) 浮体動揺に対する減衰を大きくする。

前者のアプローチとしては、(財)沿岸開発技術研究センター<sup>2)</sup>による、「揺れない浮体構造物」の技術が挙げられる。この技術には、水線幅変更型、減揺タンク上載型、SLO-ROL タンク

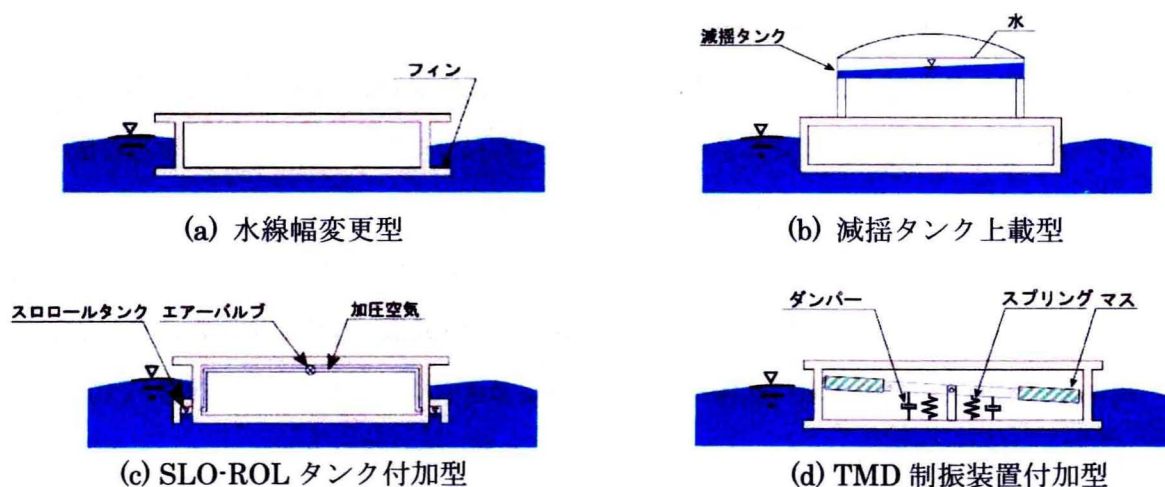


図 4.2.1 揺れない浮体構造物

ク付加型，TMD 制振装置付加型の 4 タイプがある。これら 4 つのタイプは各々手法が異なるものの，浮体動揺の固有周期を長周期化し波浪や航走波の周期から遠ざけることで横揺を低減させるコンセプトとなっている。

後者のアプローチとしては，浮体構造物にフィンを付加し，減衰力を増加させる方法が一般的である。これは，船舶分野ではビルジキールと呼ばれるものに相当する。

また，松浦ら<sup>3)</sup>は作業台船の動揺に対して実験を行い，この方法を改良することでより大きな減衰力が得られる技術「MS board(Mitsubishi Motion Supression Board)」を開発した。MS board は，図 4.2.2 のように波上側舷側に主船体との間にわずかな隙間を設けて鉛直版を船底下方に垂下する方法である。この方法では特殊な減衰機構などを必要としないため，既設の浮体等への取付も比較的容易かつ低コストである。

ただし，この MS board については，浮体吃水が浮体幅に対して比較的小さい作業台船などへの適用は松浦ら<sup>3)</sup>により検討されてきたが，浮栈橋等の浮体吃水が浮体幅に対して比較的大きいような浮体についての検討は行われていない。

著者ら<sup>1)</sup>は，この「MS board」技術を，浮栈橋等の浮体へ適用する場合のロール低減性能について，実験的検証を行った。その概要を 4. 2 に示す。

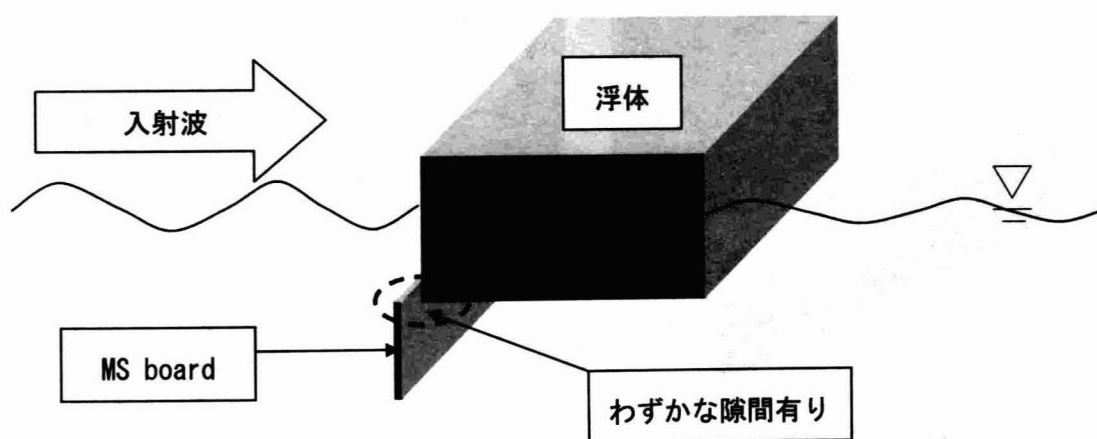


図 4.2.2 松浦らの動揺低減技術

#### 4. 2. 2 実験の概要

著者ら<sup>1)</sup>は、松浦ら<sup>3)</sup>の動揺低減技術「MS board」を浮棧橋に適用した場合の動揺低減効果について、実験による検証を行った。本実験では、図 4.2.3 に示すような浮棧橋模型(縮尺 1/7)を用いた。この実験では、動揺低減効果を明確に把握する目的で、敢えて大きな横揺応答が生じやすい形状を選定した。

図 4.2.4 に示すようにフィン模型はヒンジ支持式、剛支持式の 2 種類とした。またフィンの高さ  $H_b$  は、吃水  $d$  の 0.25 倍、0.50 倍、1.00 倍の 3 種類とした。

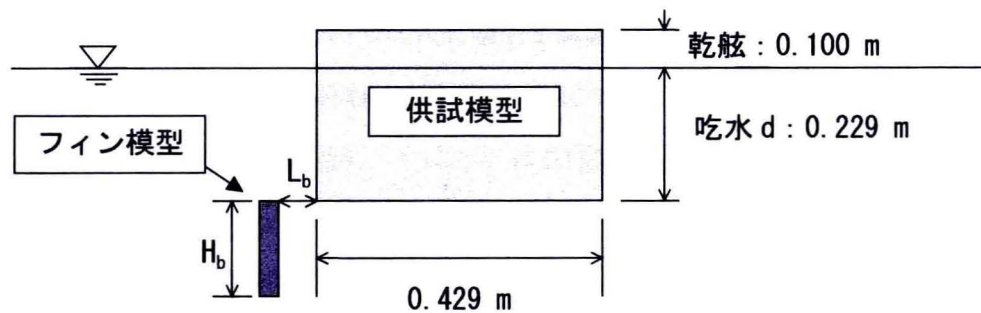


図 4.2.3 浮棧橋模型(模型縮尺 1/7)

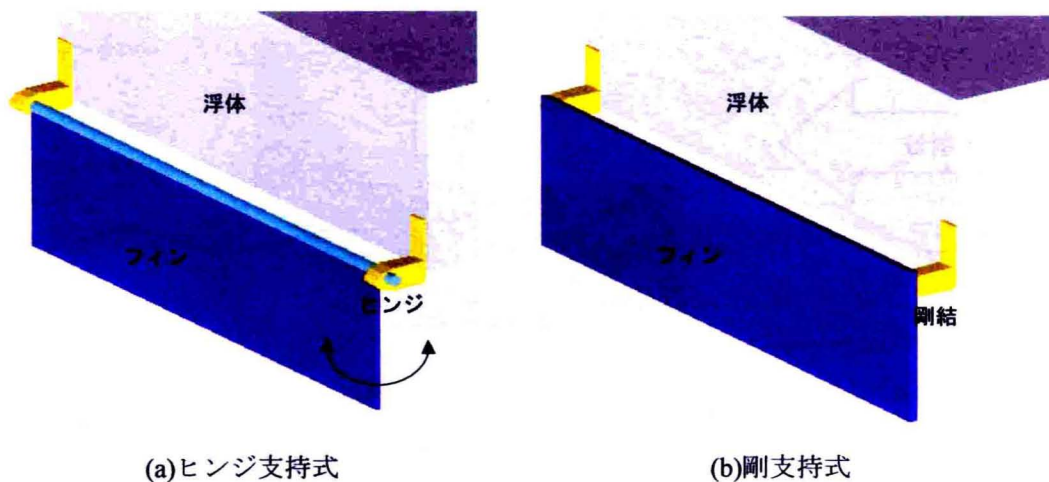


図 4.2.4 フィン模型

計測機器・模型の配置を図 4.2.5 に示す。実験では、浮体のスウェイ(前後揺)・ヒーブ(縦揺)・ロール(横揺)を運動量計測装置(図 4.2.6)にて計測した。また、入射波、反射波及び透過波を、波高計にて計測した。

実験条件は、実験波の波周期を 0.8~2.2s、波高を 0.07m とし、浮体 - フィン間の隙間



$L_b$  を 0.02m とした。ただし、浮体 - フィン間の隙間  $L_b$  については、その影響を調べるため、浮体のロールがピークとなる周期で  $L_b=0.01\text{m}$ ,  $0.02\text{m}$ ,  $0.03\text{m}$  とした場合の比較を行った。また、隙間の有無や、フィンを波上側・波下側に取り付けた場合の影響についても比較を行った。なお、模型の係留用コイルばねには、ばね定数が  $0.0578\text{kN/m}$  のものを用いた。

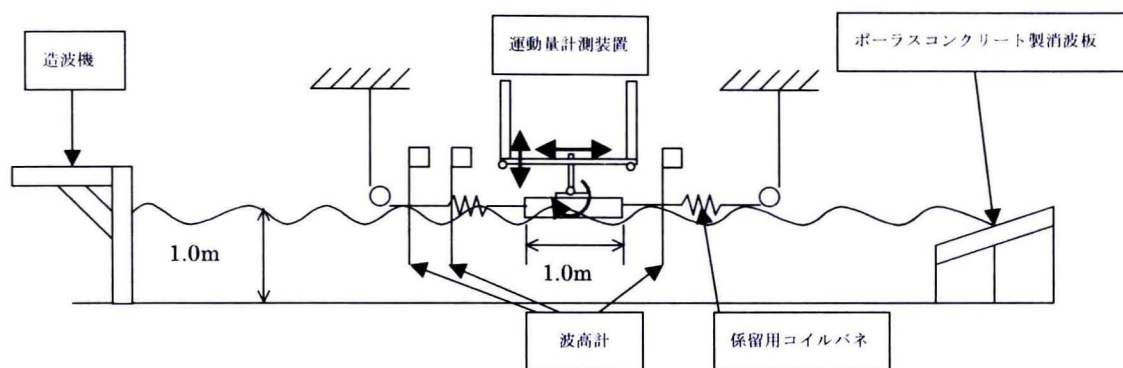
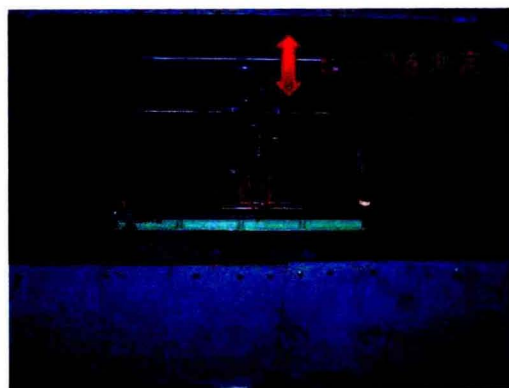
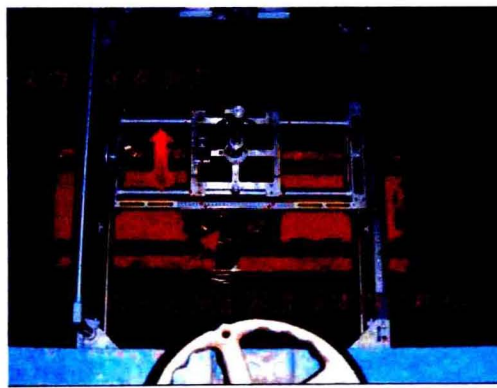


図 4.2.5 計測機器・模型の配置



(a)側面写真



(b)上面写真

図 4.2.6 運動量計測装置

### 4. 2. 3 実験結果

図 4.2.7 に剛支持式，浮体 - フィン間の隙間  $L_b$  が 0.02m の場合のロール応答実験結果を示す。フィンの無い場合は，1.7s 付近で応答がピークとなり，応答曲線が急峻な特性を示した。これに対し，フィンを装着した場合にはフィンの高さに関わらず，1.7s 付近でのロール応答が概ね 6 割程度低減されるという，高い動揺低減性能が確認された。

ただし，フィンの高さにより各々のロール応答特性は異なる結果となっている。まず，フィンの高さが吃水  $\times 0.25$  の場合には，周期 1.2s と 1.8s の 2 箇所でロールのピークが現れるような応答特性となった。これに対し，フィン高さが吃水  $\times 0.50$  の場合にはロールのピークが周期 1.8s の 1 箇所のみに現れる結果となっている。また，フィンの高さが吃水  $\times 1.00$  の場合では，ロールのピークが周期 2.15s 付近となり，フィン無しの場合に比べて長周期側へシフトしている。

ロール応答の最大値に関しては，フィン高さが吃水  $\times 0.25$ ，0.50 の場合でほぼ同等の値となっている。これに対し，フィン高さが吃水  $\times 1.0$  の場合については，吃水  $\times 0.25$ ，0.50 の場合に比べてロール応答の最大値が 1.5 倍程度大きくなっている。これは，フィンが大きい分波圧の受圧面積も大きくなり，フィンが剛結であるため浮体側に大きなモーメントを伝達してしまうことが原因である。

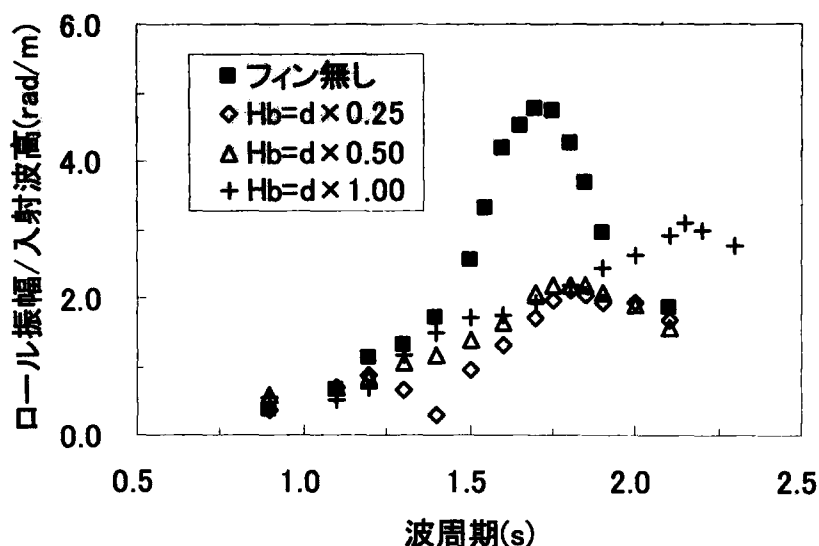


図 4.2.7 ロール応答計測結果(剛支持式)

ヒンジ支持式, 浮体 - フィン間の隙間  $L_b$  が 0.02m の場合のロール応答実験結果を図 4.2.8 に示す。フィン無しの場合のロールピーク周期 1.7s 付近で, 概ね 7 割程度のロール応答低減となり, ヒンジ支持式が剛支持式に比べて低減効果が大きいことがわかる。

また, 剛支持式の場合と比べ, その応答特性も変化している。剛支持式の場合は, フィン高さが吃水  $\times 0.25$  の場合のみロールピークが 2 つ現れたが, ヒンジ支持式では吃水  $\times 0.50$  の場合にもピークが 2 つ現れる結果となっている。フィン高さが吃水  $\times 1.00$  の場合に, ロール応答値が周期 1.4s 付近から横ばいとなり, ロール応答のピーク点がはっきりとしないことも, ヒンジ支持型における特徴の一つといえる。

ロール応答の最大値については, フィン高さが吃水  $\times 0.25$ , 0.50, 1.00 の場合で各々がほぼ同等のレベルになっており, 吃水  $\times 1.00$  の場合にロール応答最大値が大きくなった剛支持型とは異なる傾向である。これは, フィンが浮体とヒンジで連結されることで, フィンに作用するモーメントが浮体側に伝達しないためであるといえる。

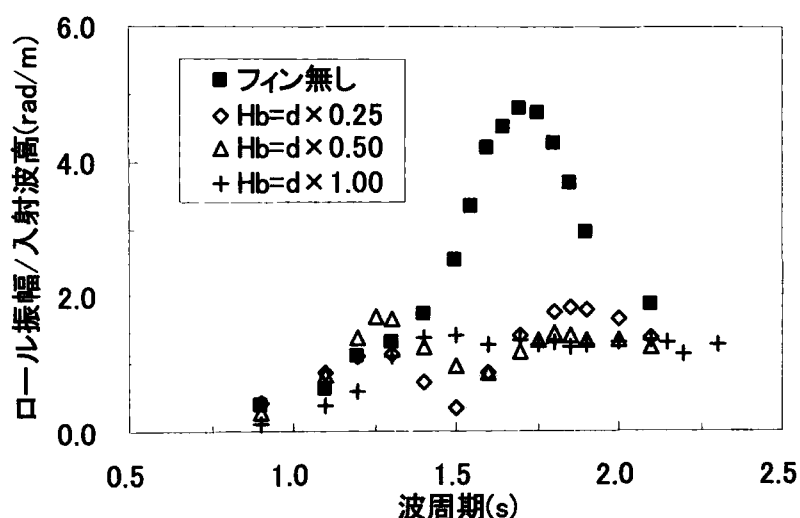


図 4.2.8 ロール応答計測結果(ヒンジ支持式)

図 4.2.9 に, 浮体のロール応答がピークとなる 1.8s にて, フィンと浮体の隙間  $L_b$  を変化させた場合の実験結果を示す。この実験結果より, ロール応答値はフィン - 浮体の間隔にほとんど影響を受けていないことがわかる。しかし, この結果からのみからはフィン - 浮体間の隙間による動揺低減効果が全く無いとも解釈できる。

そこで, 隙間が無い場合の実験を行い, 隙間の有無による影響について検証した。図 4.2.10 にその結果を示す。この結果より, 隙間が無い場合でも, フィンが無い場合に比べ

ればロール応答が低減されていることが分かる。ただし、隙間の有る場合の方が、隙間の無い場合に比べて3割程度動揺低減効果が大きくなっている。このことから、隙間によって、より大きな減衰効果が得られることがわかる。

また、これらの結果より、フィン - 浮体間の隙間の有無は減衰効果に大きく影響するが、隙間の大きさはある程度確保されていれば十分であり、減衰効果にさほど影響しないといえる。

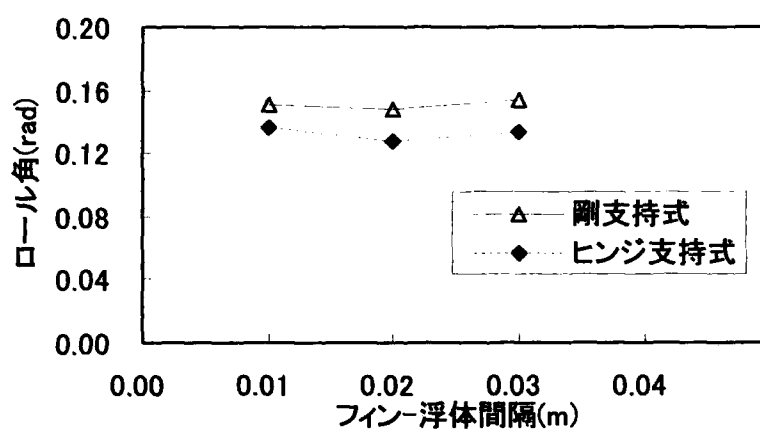


図 4.2.9 隙間の影響(フィン高さ:吃水 $\times 0.25$ , 波周期 1.8s)

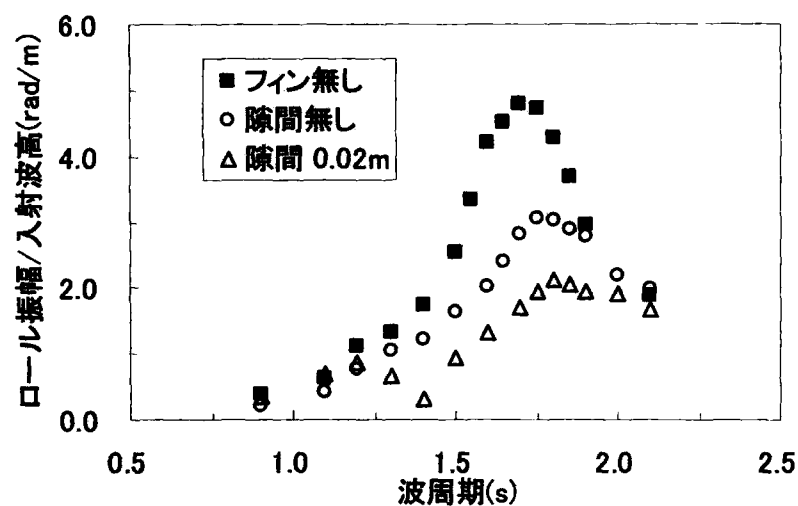


図 4.2.10 隙間の有無の影響(剛支持型, フィン高さ:吃水 $\times 0.25$ )

図 4.2.11 に、フィンを取り付けた場合と波下側に取り付けた場合のロール応答実験結果を示す。結果から分かるように、波下側にフィンを装着した場合には、全く減衰効果が得られていない。これは、フィンに作用する波力が、浮体に作用する波力のモーメントと逆向きに作用することでロールの運動を抑制することを示している。従って、波の来襲方向がある方向に限られるケースでは、浮体の波上側のみにフィンをつけておけば十分な減衰効果を得られるものと考えられる。

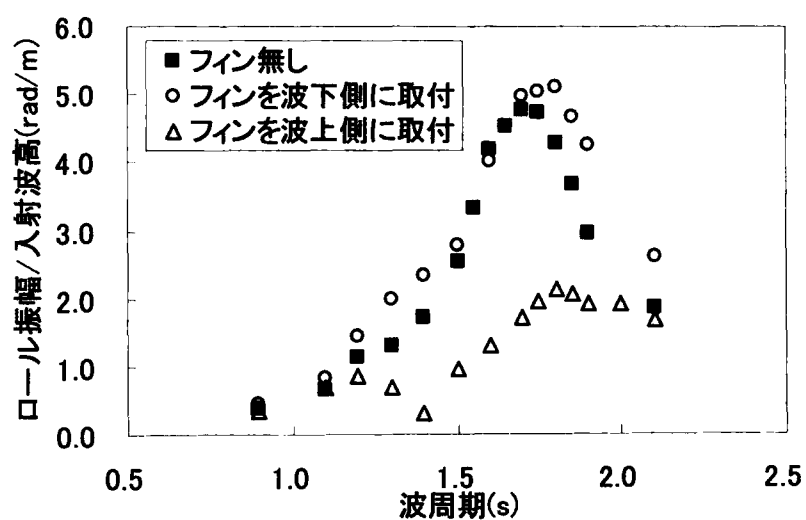


図 4.2.11 フィン取付位置の影響(剛支持型, フィン高さ: 吃水 $\times 0.25$ )

#### 4. 3 自由表面付流体－浮体運動連成計算法と実験結果の比較検証

4. 2で示した実験結果を元に、2. 1 1で示した自由水面と浮体の連成計算手法の検証を行った。本節では、まず実験結果のうち MS board を装着しない場合の浮体の規則波波浪中運動についての計算を実施した<sup>4)</sup>。

計算モデルの概要を図 4.3.1 に示す。図に示すように計算領域は6波長分とし、その領域端部には、計算領域境界からの反射波を防止するため、2. 1 0にて述べた波減衰領域を設けた。また、波入射境界側は浮体からの反射波を消波しつつ造波を行うため、造波側の水槽端部にも波減衰領域を設け速度ポテンシャル及び自由表面形状の目標値を時々刻々と入力するという2. 1 0で述べた造波方法を用いた。これにより、限られた計算領域で、計算境界からの反射波影響を排除しつつ計算を続行することが可能となる。また、計算領域中には浮体から約1波長分手前の位置に水面位置を検出するポイントを2箇所設け、合田の入反射分離計算により入射波高及び反射波高を求めた。また、浮体から1波長分後方の位置にも水面位置を検出するポイントを設け、透過波高を求めた。なお、造波波高は0.07m、計算領域の境界要素分割は水面を120分割、水底を40分割、計算領域端部の側壁を10分割とした。

浮体の計算モデルの諸元を表 4.3.1 及び図 4.3.2 に示す。ここで、浮体の減衰係数については、各応答の固有周期付近にて応答値が一致するように決定した。これは、本計算にて自

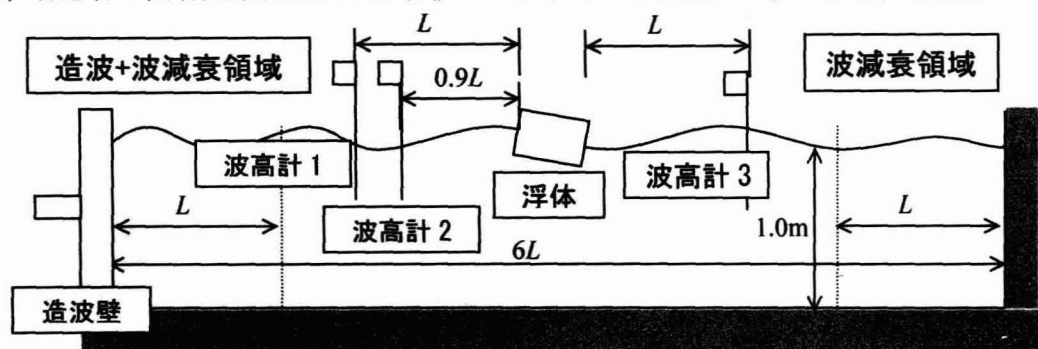


図 4.3.1 計算モデルの概要

表 4.3.1 浮体の諸元

質量	122.8 kg
慣性モーメント	4.47 kg・m <sup>2</sup>
減衰係数(スウェイ)	50 kg/s
減衰係数(ヒープ)	100 kg/s
減衰係数(ロール)	4 kg・m/s
係留ばね	57.8 N/m

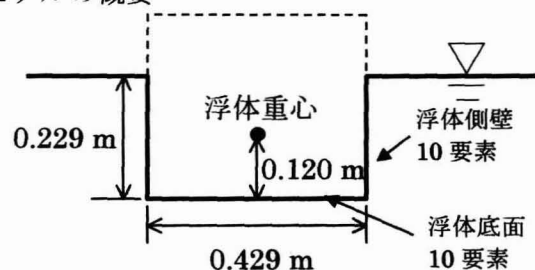
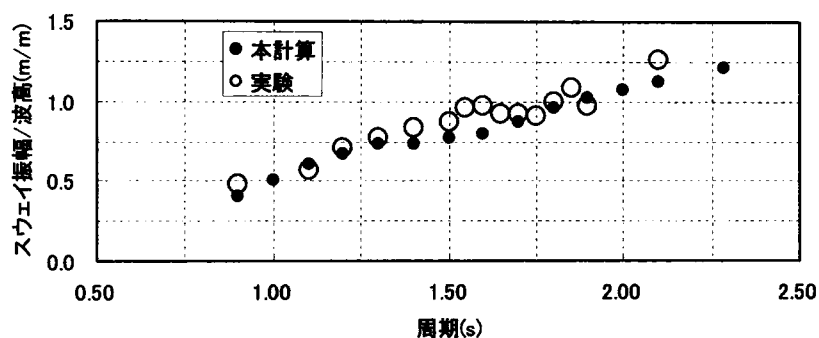


図 4.3.2 浮体の諸元

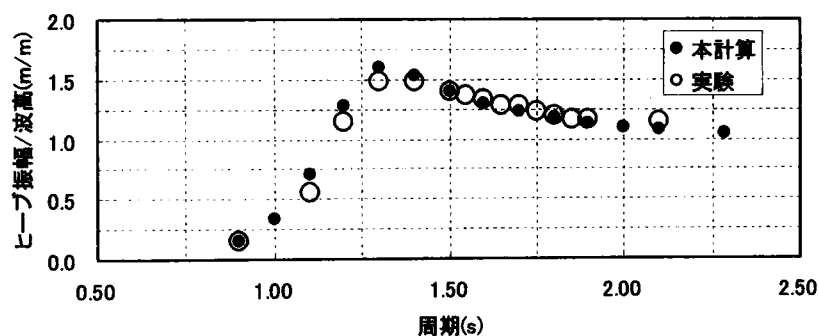
動的に考慮される造波減衰のみでは、固有周期付近にて応答が過大となるためである。また、本計算は完全流体、すなわちポテンシャル理論に基づいた流体計算が行われているため流体の粘性による減衰は考慮されない。従って、実現象において浮体に作用する流体粘性による減衰については、別途浮体の運動方程式中で付加する必要がある。

以上の条件にて計算された浮体応答値と実験値の比較について、図 4.3.3 に示す。

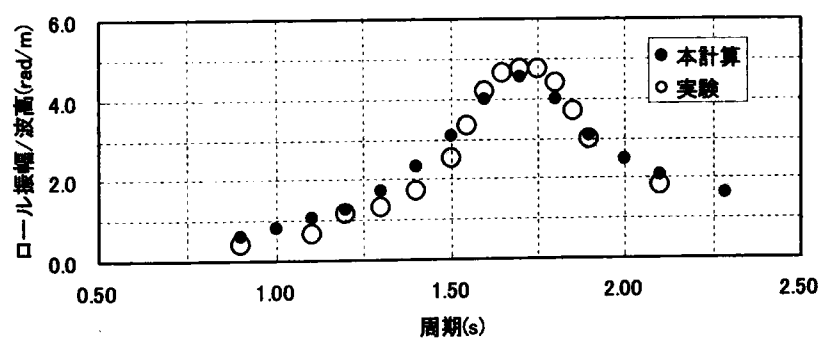
図より、計算値と実験値が良好な一致を示していることがわかる。また、計算により応答の周期特性がよく再現されており、本計算手法の妥当性が確認できている。



(a) スウェイ応答



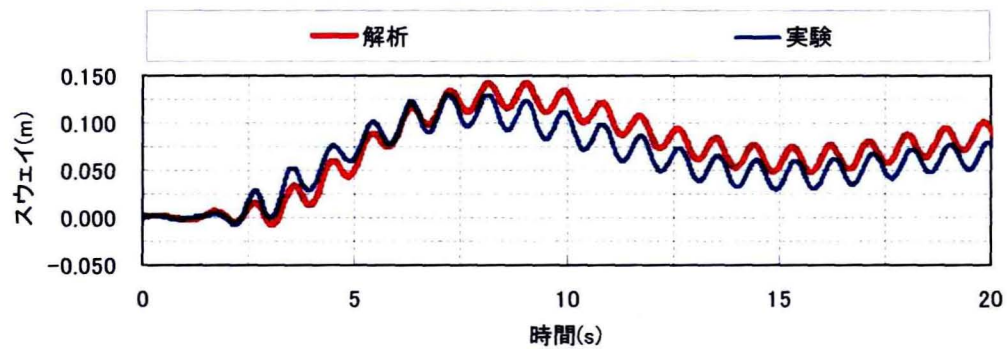
(b) ヒープ応答



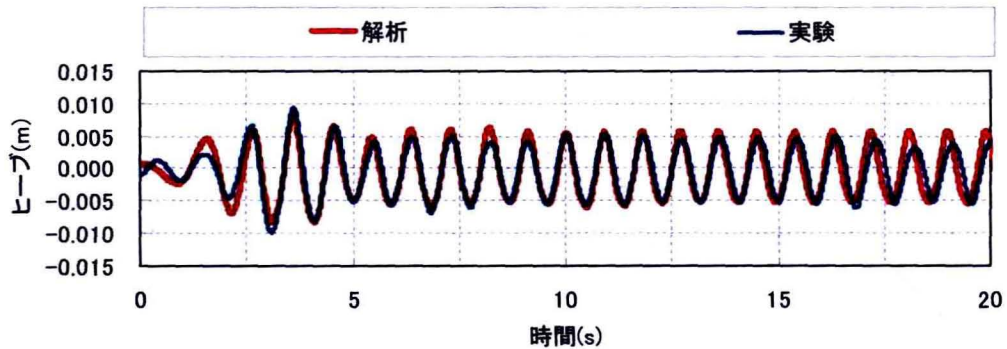
(c) ロール応答

図 4.3.3 浮体応答値の計算結果及び実験値との比較

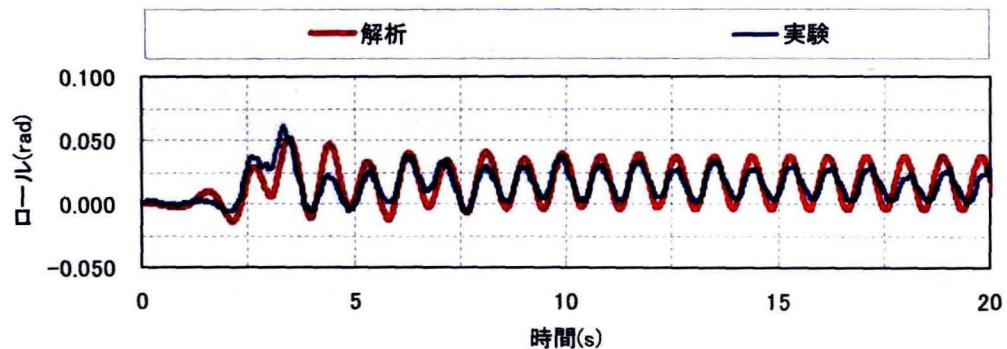
次に、浮体応答の時刻歴波形について示す。まず、ロールとヒープの応答が小さい波周期 0.9s における時刻歴波形について、計算結果と実験結果を図 4.3.4 に示す。図より、浮体が波力を受けて運動を開始し、定常状態へと至る過渡応答の過程が定性的には再現されている。特に、スウェイ運動初期の過渡応答において、浮体がスウェイ固有周期（15s 程度）にて自由振動する様子が計算でも再現されていることがわかる。また、スウェイ、ロール変位のシフト量についても概ね妥当な計算結果が得られており、本計算にて波漂流力についても自動的に評価ができているといえる。



(a)スウェイ応答時刻歴波形



(b)ヒープ応答時刻歴波形

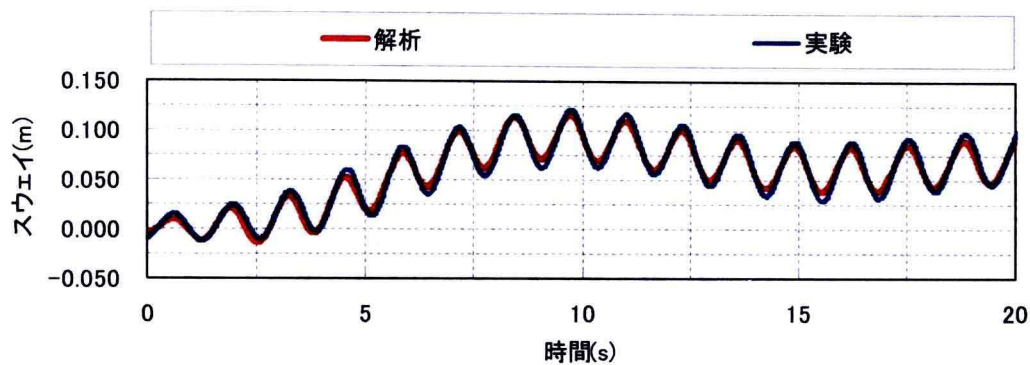


(c)ロール応答時刻歴波形

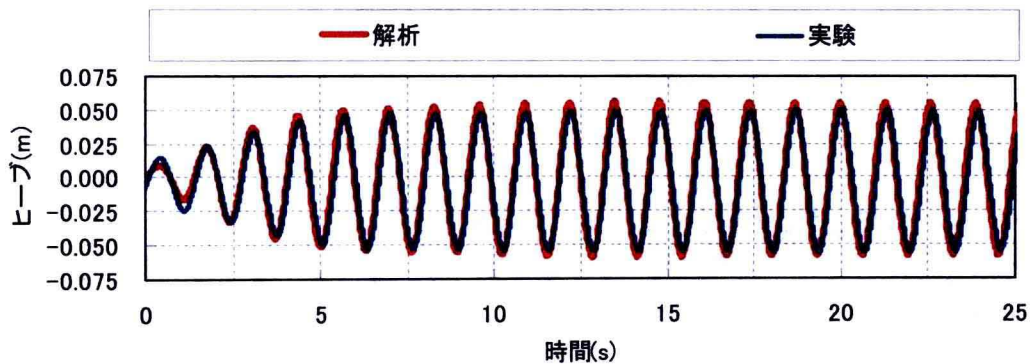
図 4.3.4 浮体応答時刻歴波形の計算結果及び実験結果との比較（波周期：0.9s）



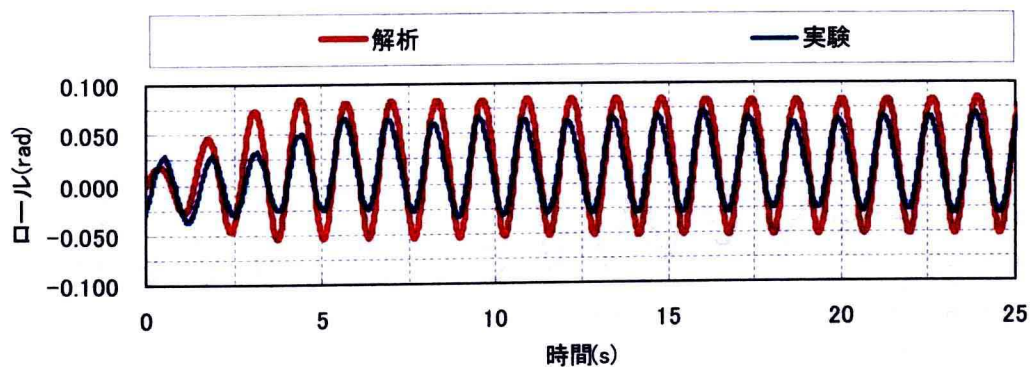
ヒープ応答が最大となる波周期 1.3s の時の時刻歴波形について、計算結果及び実験結果を図 4.3.5 に示す。ロールの過渡応答及び振幅については実験結果との差異が見られるものの、ロール変位のシフト量については妥当な計算結果となっていることがわかる。また、スウェイ・ヒープについては計算結果と実験結果の時刻歴波形が良好な一致を示している。



(a)スウェイ応答時刻歴波形



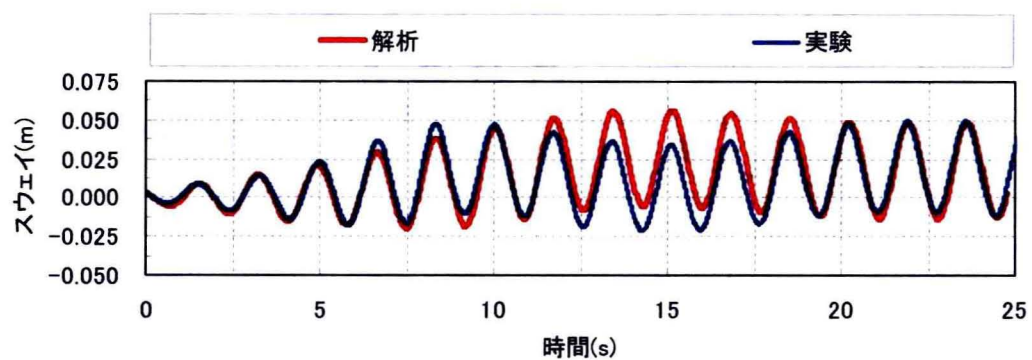
(b)ヒープ応答時刻歴波形



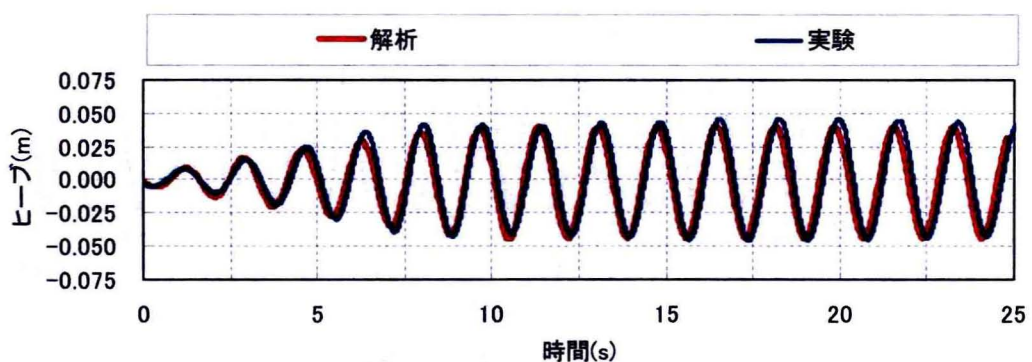
(c)ロール応答時刻歴波形

図 4.3.5 浮体応答時刻歴波形の計算結果及び実験結果との比較 (波周期: 1.3s)

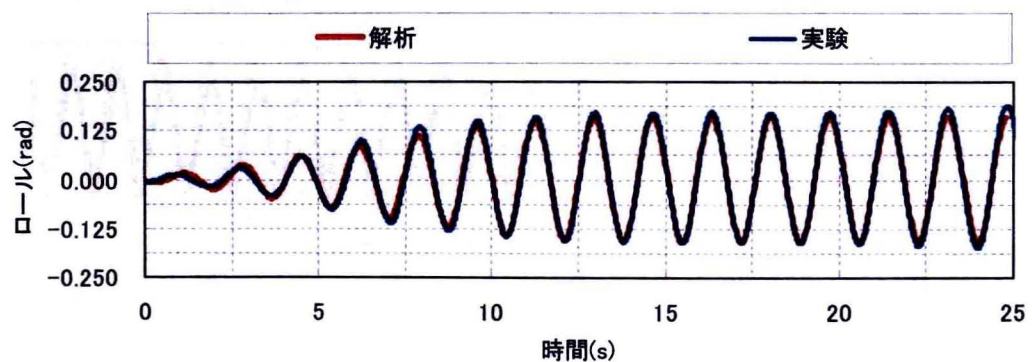
ロール応答が最大となる波周期 1.7s の時の時刻歴波形について、計算結果及び実験結果を図 4.3.6 に示す。この波周期は、スウェイの波漂流力が変化してゆく周期帯であるため、その評価が難しいものの、計算結果と実験結果のスウェイ応答波形は比較的良好な一致を示している。また、ヒープ・ロールについては過渡応答、定常状態ともに計算結果は実験結果と良好な一致を示している。



(a)スウェイ応答時刻歴波形



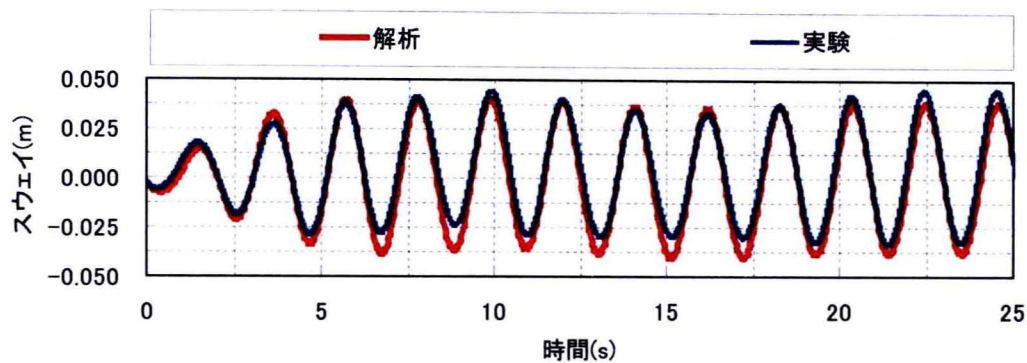
(b)ヒープ応答時刻歴波形



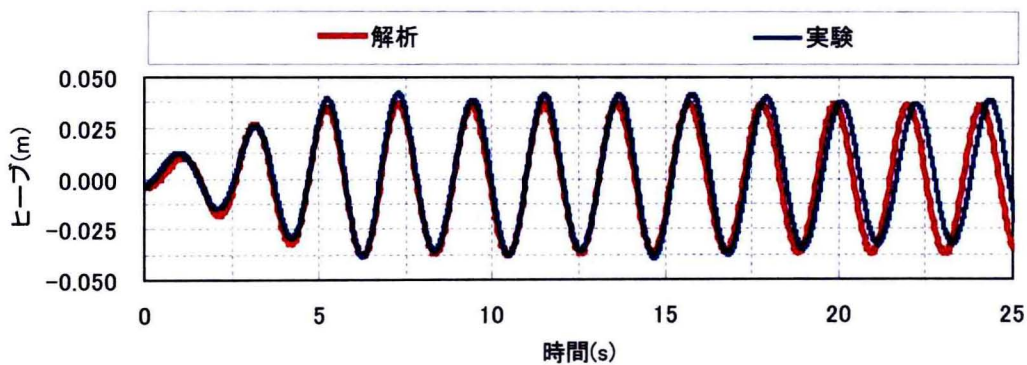
(c)ロール応答時刻歴波形

図 4.3.6 浮体応答時刻歴波形の計算結果及び実験結果との比較（波周期：1.7s）

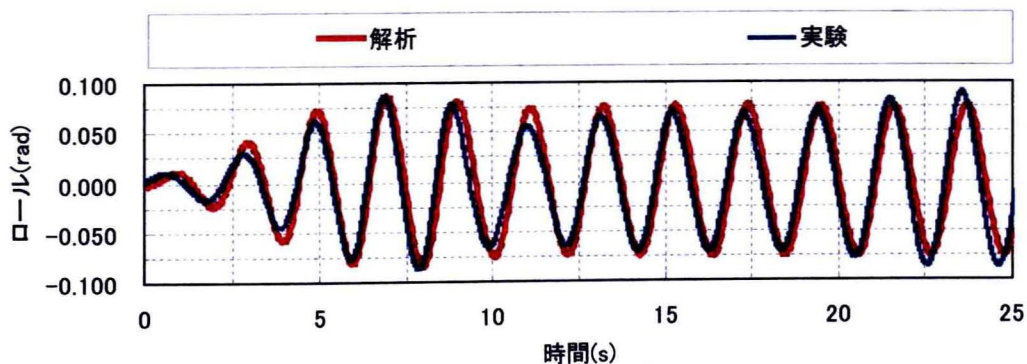
波漂流力が0付近となる波周期2.1sの時の時刻歴波形について、計算結果及び実験結果を図4.3.7に示す。この周期では、今まで見られたスウェイ変位のシフトや、過渡応答状態での長周期の自由振動が計算結果、実験結果ともにほとんど現れない結果となった。また、スウェイ・ヒープ・ロールの過渡応答、定常状態ともに計算結果は実験結果と良好な一致を示している。



(a)スウェイ応答時刻歴波形



(b)ヒープ応答時刻歴波形



(c)ロール応答時刻歴波形

図 4.3.7 浮体応答時刻歴波形の計算結果及び実験結果との比較（波周期：2.1s）

本計算によって浮体運動については、以上述べたように定性的にも定量的にもほぼ良好な精度を有していることがわかった。次に、浮体運動に伴う水面運動の特性について、波の浮体による反射特性及び浮体背面への透過特性を図 4.3.8 に示す。

まず、透過率については、波周期 1.2s 付近でいったん小さくなり、波周期 1.75s 以上の領域ではほぼ 1.0 程度となる特性が、計算結果と実験結果の両方で現れた。また、定量的にもすべての周期帯で両者は良好な一致を示しており、本計算による透過波の計算精度が高いことがわかる。また、反射率については波周期 1.2s 以上の領域でその値が減少していき、波周期 1.75s 以上の領域ではほぼゼロとなる実験結果となっている。波周期 1.2s 以下の領域における反射率の値について、計算結果は実験結果に比べて若干小さめの値となっているものの、計算結果と実験結果は定性的には良好な一致を示しているといえる。

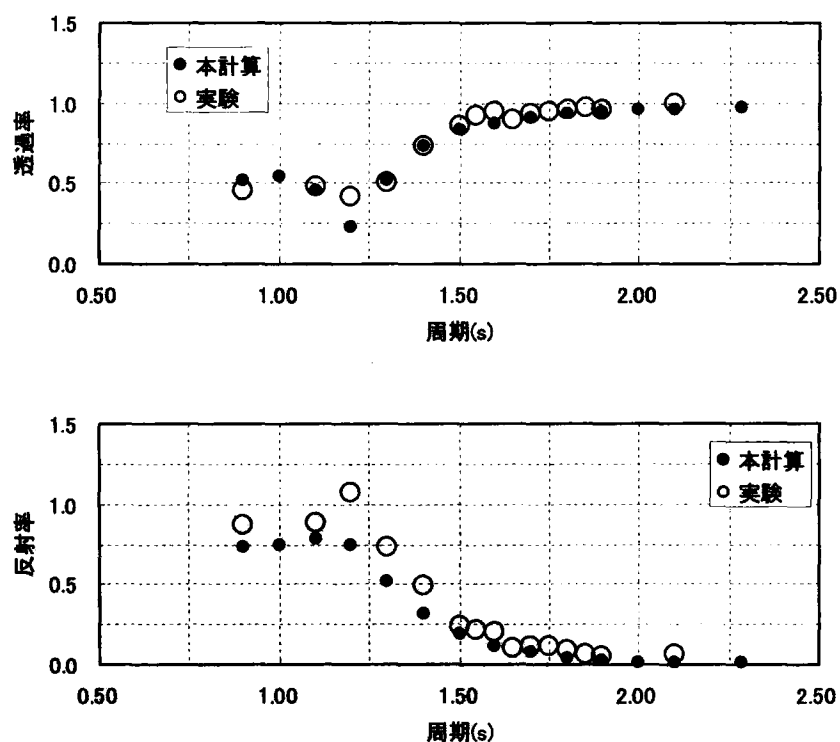


図 4.3.8 透過率・反射率の計算結果及び実験値との比較

#### 4. 4 フィンに対する簡易抗力モデルの浮体運動計算への導入及び実験との比較

次に、MS board 等フィン構造による浮体動揺低減について、本計算法をベースとして動揺低減効果を評価するための計算手法の開発を行った。ここで、本計算法では流体を理想流体と仮定しており、フィンに作用する抗力の評価が出来ない。従って、フィンに作用する抗力については何らかのモデル化を施し、浮体の運動方程式に組み込む必要がある。

このフィンに作用する抗力について、本研究では図 4.4.1 のようなモデル化を試みた。このモデルでは、フィン上端部と下端部では流動状況が異なることを考慮して、フィンに作用する抗力を、フィンの上半分と下半分に分け、次式のようにした。

$$F_{Du} = C_D \cdot \rho \frac{D}{4} U_{Fu} |U_{Fu}| \cdot B \quad (4-4-1)$$

$$F_{Db} = C_D \cdot \rho \frac{D}{4} U_{Fb} |U_{Fb}| \cdot B \quad (4-4-2)$$

ここで、 $C_D$  は抗力係数、 $\rho$  は流体密度、 $D$  はフィン高さ、 $B$  はフィン奥行き方向長さである。また、 $U_{Fu}$ 、 $U_{Fb}$  はフィンの上半分、下半分の相対流速で、次式にて表現される。

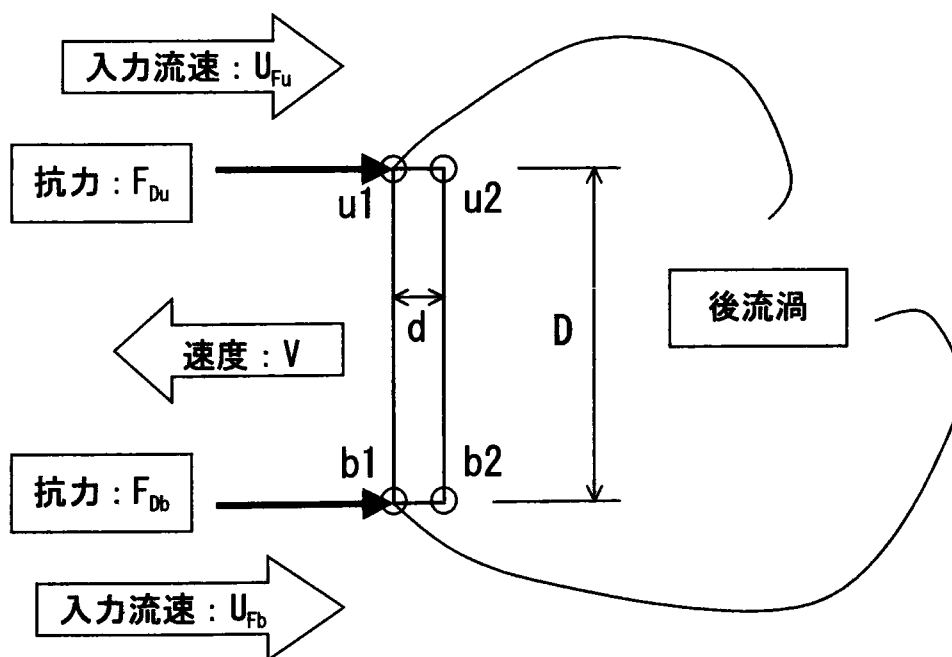


図 4.4.1 フィンへ作用する抗力モデル



$$U_{fu} = V + \alpha_u \frac{\phi_{u2} - \phi_{u1}}{d} \quad (4-4-3)$$

$$U_{fb} = V + \alpha_b \frac{\phi_{b2} - \phi_{b1}}{d} \quad (4-4-4)$$

ここに、 $\phi_{u1}$ 、 $\phi_{u2}$ 、 $\phi_{b1}$ 、 $\phi_{b2}$ は、フィン角点での速度ポテンシャル、 $V$ はフィンの法線方向速度である。 $\alpha_u$ 、 $\alpha_b$ は流速フィン端部の局所的な流速を修正するための係数である。

ここで、式(4-4-3)、(4-4-4)の第2項はフィンの両端での局所的な流速を表しており、この部分の流速は非常に大きい。しかし、式(4-4-1)、(4-4-2)のような抗力計算に用いる流速はフィンへ向かう全体的な流速であるため、式(4-4-3)、(4-4-4)の第2項における $\alpha_u$ 、 $\alpha_b$ を1.0として計算すると過大な抗力が作用する。そこで、 $\alpha_u$ 、 $\alpha_b$ として適切な値を定めるために、図4.4.2、図4.4.3のような簡略化したモデルを考えた。この図に示したフィン端部の局所流速 $UF_{Eu}$ 、 $UB_{Eu}$ 、 $UF_{Eb}$ 、 $UB_{Eb}$ とフィンへ向かう流速 $U$ の関係より、 $\alpha_u$ 、 $\alpha_b$ を以下のように定めた。

$$\alpha_u = \begin{cases} U/UF_{Eu} & (U > 0) \\ U/UB_{Eu} & (U < 0) \end{cases} \quad \alpha_b = \begin{cases} U/UF_{Eb} & (U > 0) \\ U/UB_{Eb} & (U < 0) \end{cases} \quad (4-4-5)$$

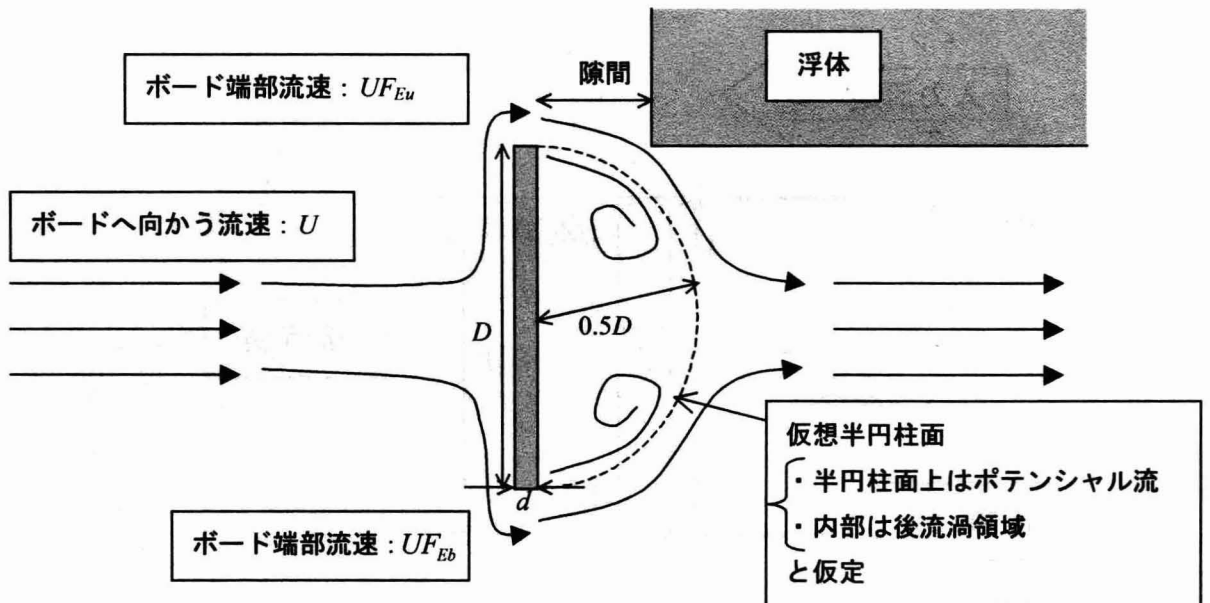


図 4.4.2 フィン端部の局所流速簡易モデル ( $U > 0$  の場合)

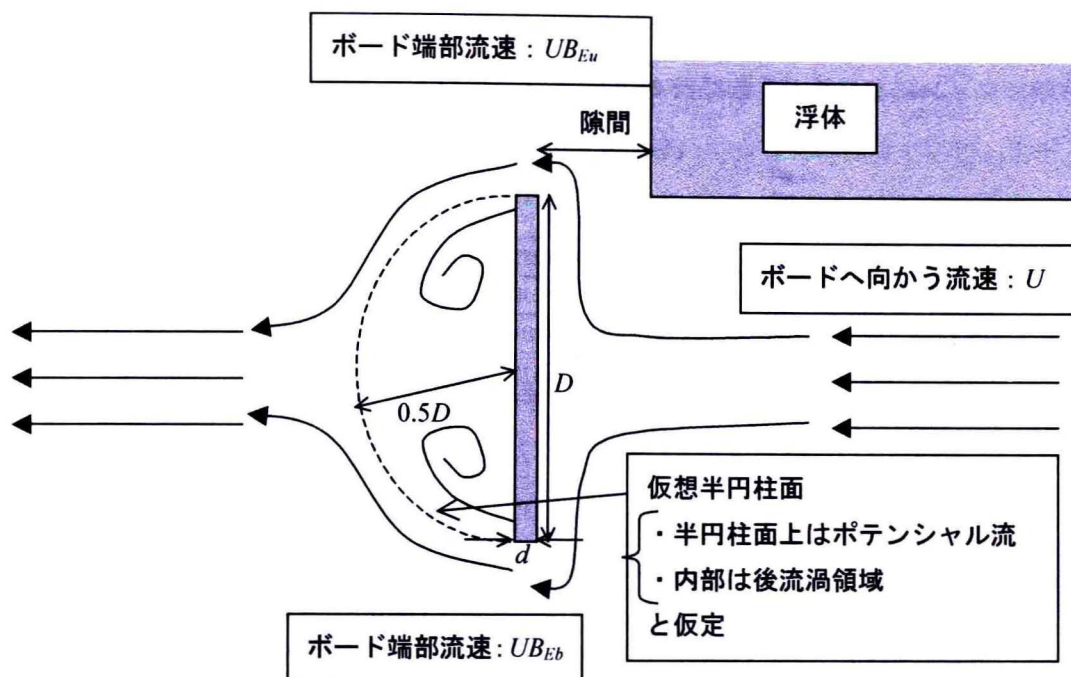


図 4.4.3 フィン端部の局所流速簡易モデル ( $U < 0$  の場合)

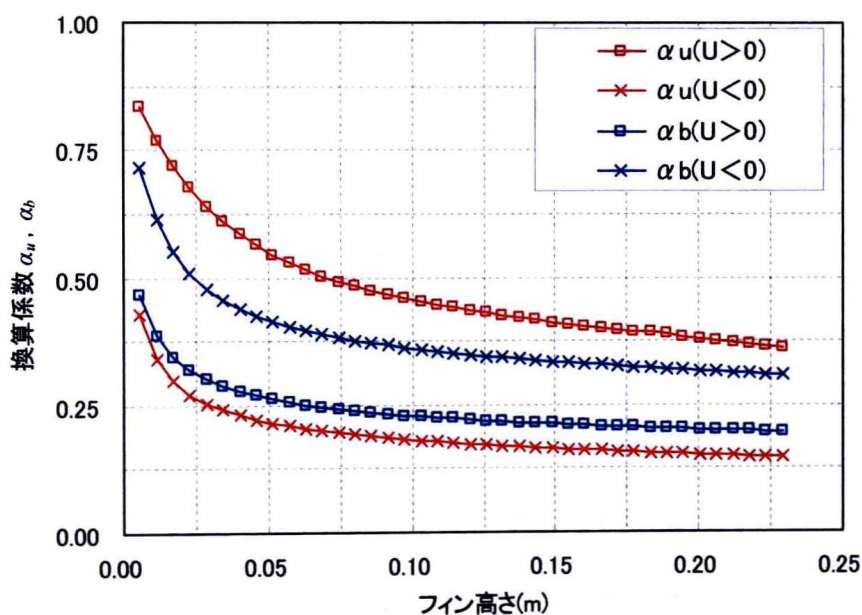


図 4.4.4 フィン高さと換算係数  $\alpha_u, \alpha_b$  の関係

式(4-4-5)における、フィン端部の局所流速  $UF_{Eu}$ ,  $UB_{Eu}$ ,  $UF_{Eb}$ ,  $UB_{Eb}$  については、フィンへ向かう流速  $U$  を流入条件とした境界条件にて、境界要素法により計算を行った。ここで、先ほどの実験模型と同条件の浮体諸元とした場合、フィンの高さ  $D$  と  $\alpha_u$ ,  $\alpha_b$  の関係は図 4.4.4 のようになった。

この式(4-4-1)～(4-4-5)に示したフィンへ作用する抗力モデルを、浮体運動計算に導入し、

MS board を装着した場合の計算を行った。ここに、ロール応答が大きくなる波周期 1.7s 時の、フィンにおける KC 数は表 4.4.1 のようになる。

表 4.4.1 対象とする KC 数の概算

フィン高さ: $D$ (m)	0.057 ~ 0.229
水面からのフィン鉛直位置: $z$ (m)	0.258 ~ 0.344
フィン位置での水平流速振幅(微小振幅波理論にて計算): $U$ (m/s)	0.101 ~ 0.091
KC 数 = $U \times T / D$ ( $T=1.7$ s で計算)	0.675 ~ 2.996

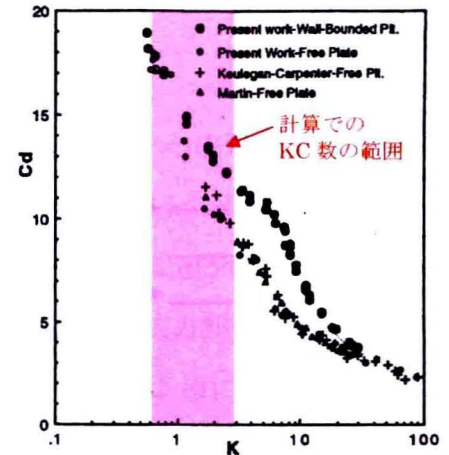


図 4.4.5 KC 数－抗力係数の関係 (Turgut Sarpkaya ら<sup>4)</sup>)

MS board を装着した場合の効果は、極めて非線形性が強く、フィンに作用する抗力の影響が支配的であるため式(4-4-1)、式(4-4-2)における  $C_D$  値が重要となる。

Turgut Sarpkaya ら<sup>5)</sup>は、船舶の動揺低減構造であるビルジキール等のフィン状突起物に作用する非定常流体力に関して実験的研究を行っており、抗力係数  $C_D$  を KC 数にて整理している。Turgut Sarpkaya ら<sup>4)</sup>の結果を図 4.4.5 に示すが、これに表 4.4.1 の KC 数を当てはめると式(4-4-1)、(4-4-2)での抗力係数  $C_D$  は、10.0～20.0 の範囲にある。実際には、浮体は波力により動揺するため、フィンから見た場合の相対流速は表 4.4.1 に比べて小さくなるものと考えられる。従って、今回の計算では抗力係数値として 20.0 の値を採用した。

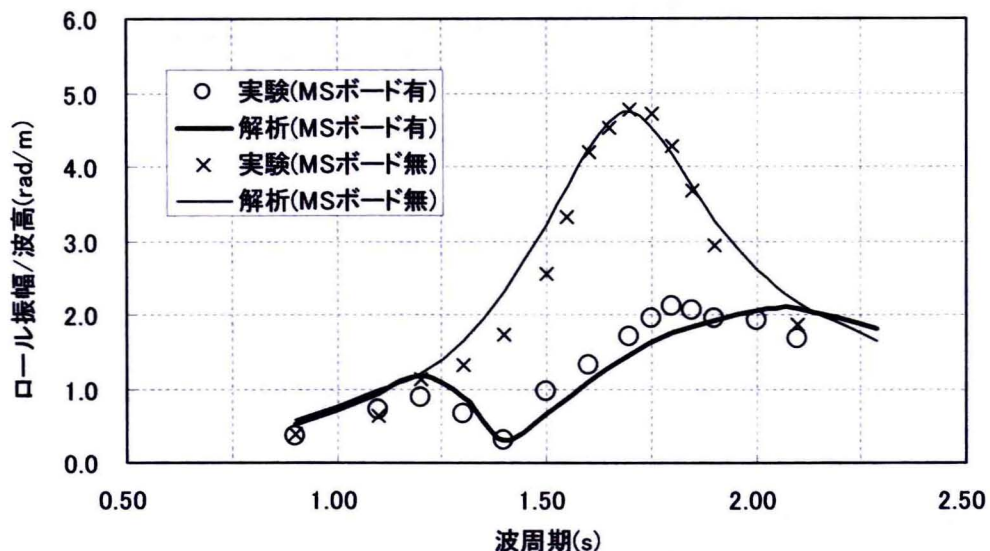


図 4.4.6 MS ボードの動揺低減効果計算結果 (剛支持型, フィン高さ: 吃水 $\times$ 0.25)



図 4.4.6～4.4.8 に剛支持式の MS board を装着した場合の計算結果を示す。まず、フィン高さが吃水×0.25 の場合であるが、波周期 1.2s で一つの応答ピークが現れ、波周期 1.4s で応答が一旦落ち込むという実験結果の特性を、計算にて良く再現出来ている。また、波周期 1.5s～2.0s の領域での応答値についても、計算値と実験値で比較的良好な一致を示している。フィン高さが吃水×0.50 の場合には、波周期 1.0s～1.5s の領域で計算値が実験値に比べ小さめの値となった。ただし、ロールが問題となる波周期 1.7s 付近での動揺低減度については比較的良好な評価が出来ているといえる。

フィン高さが吃水×1.00 の場合については、実験値と計算値が定性的・定量的に良好な

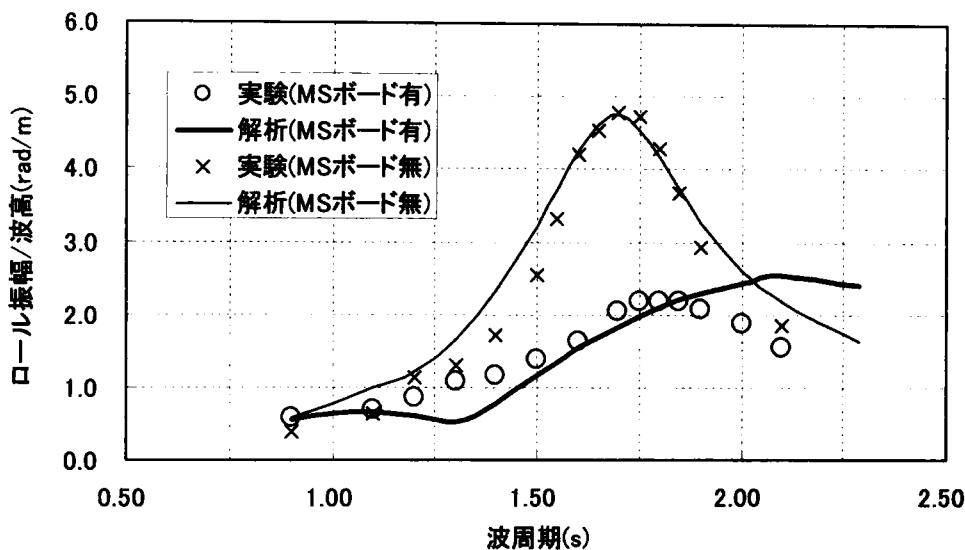


図 4.4.7 MS ボードの動揺低減効果計算結果（剛支持型，フィン高さ：吃水×0.50）

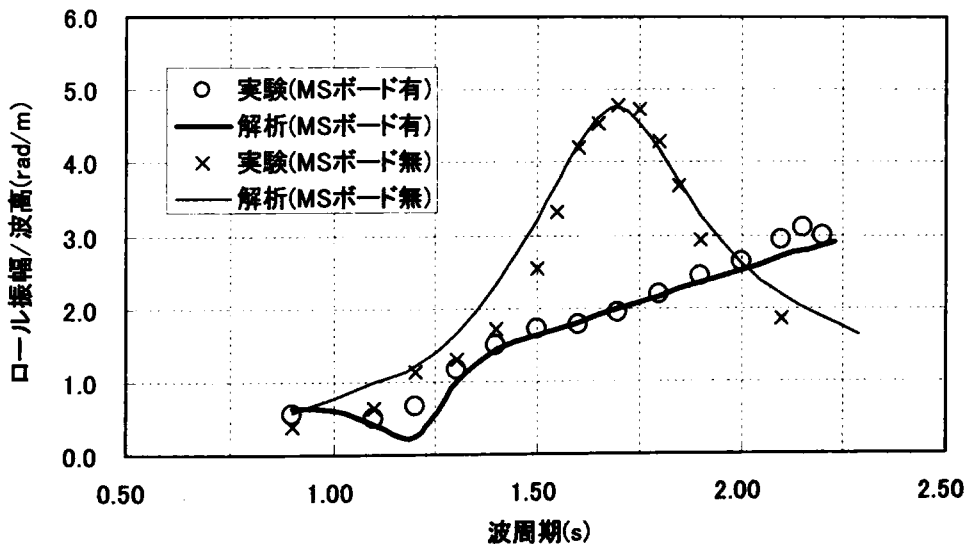


図 4.4.8 MS ボードの動揺低減効果計算結果（剛支持型，フィン高さ：吃水×1.00）

一致を示している。特に波周期 1.1s~1.4s の領域にて応答値（ロール振幅／波高）が 0.5 rad/m から 1.5 rad/m まで急激に増加する傾向についても、計算にてよく再現されている。

ただし、MS board が装着された場合のロール応答のピーク周期は、フィン高さが吃水  $\times 0.25$ , 0.50 の場合において実験値よりも長周期側の計算結果となっている。これは、フィンに作用する抗力の評価が適切でないためと考えられる。実際の流場は、フィンへ向かう全体的な流速やフィンの運動等が相互に作用し複雑な挙動を示すものと推測され、その効果を簡易な抗力モデルで完全に再現することは難しい。その意味では、より精緻な抗力モデルの構築が今後の課題であるといえる。

#### 4. 5 フィンがヒンジ支持式の場合の計算モデル及び実験との比較

ヒンジ支持されたフィンの場合には、図 4.5.1 に示すようにピン連結された 2 剛体に関する運動を解く必要があるため、運動方程式の定式化を行った。まず、2 つの剛体の幾何学的関係は次式のように表すことが出来る。

$$\begin{cases} x_g = x_c + L_g \sin \theta_g \\ y_g = y_c + L_g \cos \theta_g \end{cases} \quad (4-5-1)$$

$$\begin{cases} x_f = x_c - L_f \sin \theta_f \\ y_f = y_c - L_f \cos \theta_f \end{cases} \quad (4-5-2)$$

ここで、 $L_g$ ,  $L_f$  は浮体重心、およびフィン重心からヒンジ点までの各々の距離であり、剛体の条件から時間によらず一定の値となる定数である。式(4-5-1)、式(4-5-2)を時間微分すると以下ようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_g = \dot{x}_c + L_g \dot{\theta}_g \cos \theta_g \\ \dot{y}_g = \dot{y}_c - L_g \dot{\theta}_g \sin \theta_g \end{cases} \quad (4-5-3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \dot{x}_c - L_f \dot{\theta}_f \cos \theta_f \\ \dot{y}_f = \dot{y}_c + L_f \dot{\theta}_f \sin \theta_f \end{cases} \quad (4-5-4)$$

これをさらに微分すれば浮体重心、ボード重心、ヒンジ点の加速度に関する次の関係式が

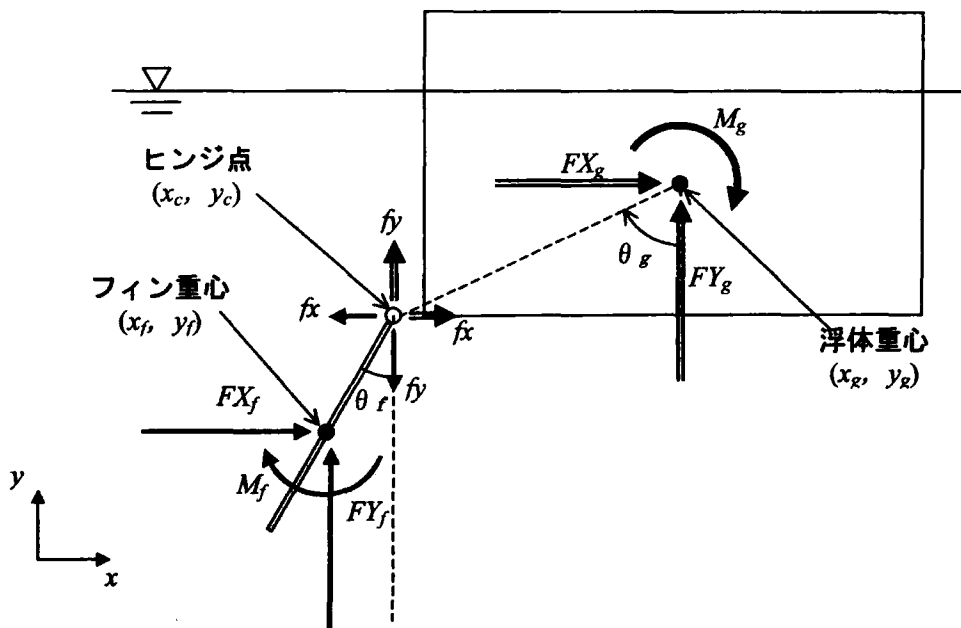


図 4.5.1 ヒンジ支持式 MS ボード

得られる。

$$\begin{cases} \ddot{x}_g = \ddot{x}_c - L_g \dot{\theta}_g^2 \sin \theta_g + L_g \ddot{\theta}_g \cos \theta_g \\ \ddot{y}_g = \ddot{y}_c - L_g \dot{\theta}_g^2 \cos \theta_g - L_g \ddot{\theta}_g \sin \theta_g \end{cases} \quad (4-5-5)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_f = \ddot{x}_c + L_f \dot{\theta}_f^2 \sin \theta_f - L_f \ddot{\theta}_f \cos \theta_f \\ \ddot{y}_f = \ddot{y}_c + L_f \dot{\theta}_f^2 \cos \theta_f + L_f \ddot{\theta}_f \sin \theta_f \end{cases} \quad (4-5-6)$$

次に、2つの剛体に関する並進成分の力学的条件は以下ようになる。

$$\begin{cases} m_g \ddot{x}_g = FX_g + fx \\ m_f \ddot{x}_f = FX_f - fx \end{cases} \quad (\text{x 方向}) \quad (4-5-7)$$

$$\begin{cases} m_g \ddot{y}_g = FY_g + fy \\ m_f \ddot{y}_f = FY_f - fy \end{cases} \quad (\text{y 方向}) \quad (4-5-8)$$

ここに、 $m_g$ ,  $m_f$ は浮体及びフィンの質量、 $FX_g$ ,  $FX_f$ は浮体及びフィンに作用する外力(流体力・重力・係留力等全てを含む)の  $x$  方向成分、 $FY_g$ ,  $FY_f$ はその  $y$  方向成分である。また、 $fx$ ,  $fy$  はヒンジ点における浮体－フィン間の連結力の  $x$  方向、 $y$  方向成分である。

式(4-5-7)及び式(4-5-8)において、 $fx$ ,  $fy$  を消去すると以下ようになる。

$$m_g \ddot{x}_g + m_f \ddot{x}_f = FX_g + FX_f \quad (4-5-9)$$

$$m_g \ddot{y}_g + m_f \ddot{y}_f = FY_g + FY_f \quad (4-5-10)$$

これに式(4-5-5), 式(4-5-6)を代入すると、この力学的関係はヒンジ点の加速度と浮体・フィン各々の重心点周りの回転速度・加速度にて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} (m_g + m_f) \ddot{x}_c = & FX_g + FX_f + m_g L_g \dot{\theta}_g^2 \sin \theta_g - m_f L_f \dot{\theta}_f^2 \sin \theta_f \\ & - m_g L_g \ddot{\theta}_g \cos \theta_g + m_f L_f \ddot{\theta}_f \cos \theta_f \end{aligned} \quad (4-5-11)$$

$$\begin{aligned} (m_g + m_f) \ddot{y}_c = & FX_g + FX_f + m_g L_g \dot{\theta}_g^2 \cos \theta_g - m_f L_f \dot{\theta}_f^2 \cos \theta_f \\ & + m_g L_g \ddot{\theta}_g \sin \theta_g - m_f L_f \ddot{\theta}_f \sin \theta_f \end{aligned} \quad (4-5-12)$$

以上より、次タイムステップのヒンジ点並進成分加速度は、その時刻の浮体及びフィンの重心点周りの回転変位・速度・加速度が既知であれば上式より求めることができる。しかし、実際の計算においては浮体及びフィンの回転成分についても未知である。従って、回転成分に関しては、現在タイムステップの回転加速度を仮値として回転速度、回転変位の次タイムステップにおける仮値を計算し、式(4-5-11), 式(4-5-12)に代入することでヒンジ

点並進成分加速度の仮値を求める。これと式(4-5-5)～(4-5-8)よりフィン－浮体間の連結力  $f_x$ ,  $f_y$  に対する次タイムステップの仮値を求めることが出来る。これを、以下に示す回転成分の力の釣り合いの式に代入することで、浮体及びフィンの重心点周り回転加速度に関する次タイムステップの仮値を求める。

$$I_g \ddot{\theta}_g = M_g - f_x \cdot L_g \cos \theta_g + f_y \cdot L_g \sin \theta_g \quad (4-5-13)$$

$$I_f \ddot{\theta}_f = M_f - f_x \cdot L_f \cos \theta_f + f_y \cdot L_f \sin \theta_f \quad (4-5-14)$$

$M_g$ ,  $M_f$  は浮体及びフィンに作用する外力(流体力・重力・係留力等全てを含む)の回転成分である。また、 $M_f$  にはフィンに作用する抗力も含まれている。式(4-5-13), (4-5-14)から求められた仮値を元に、次タイムステップにおける全ての変数を更新し、これを繰り返す。繰り返しの過程において仮値が十分収束したら、その値を次タイムステップの値とする。

この、浮体－フィンをヒンジ接合した2剛体の連成運動計算を、4.4にて述べたMS board によるロール応答評価計算に導入した。その結果を、図4.5.2～4.5.4に示す。なお、計算では、フィンがヒンジ点周りで回転する以外は4.4と同条件とした。ただし、フィン高さが吃水×0.25の場合、フィン上半分・下半分の両方に抗力を加えるとフィンが大きく回転し計算が破綻したため、フィン上半分のみに抗力を作用させ計算を行った。

まず、フィン高さが吃水×0.25の場合について述べる。この場合には、波周期1.3s～1.8s程度の範囲では、実験値と計算値が良好な一致を示している。ただし、ヒープの固有周期である1.3s付近では、計算値が実験値に比べ大きな値である。これは、後で示すがフィン運動がヒープ運動と連成し大きな振れ角を生じていることに起因する。このようにフィンの振れ角が大きい状態の場合は、4.4で示したようなフィンへの抗力作用モデルの適用

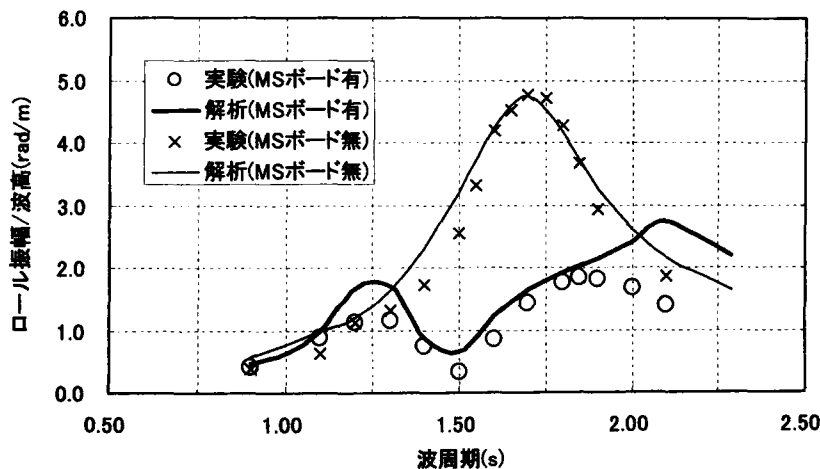


図 4.5.2 MS ボードの動揺低減効果計算結果 (ヒンジ支持型, フィン高さ: 吃水×0.25)

が難しい。ヒープ固有周期付近において計算値が実験値に比べて大きくなる傾向は、フィン高さが吃水 $\times 0.50$ 、吃水 $\times 1.00$ と大きくなるほど顕著である。

フィン高さが吃水 $\times 0.50$ の場合、波周期 1.5s 以上の領域にて計算値が実験値に比べ小さな値となった。剛支持型の解析の場合には実験値及び計算値の値が比較的良く一致していたことを考えると、ヒンジ支持されたフィンの回転運動が解析結果にも大きく影響しているものと考えられる。

フィン高さが吃水 $\times 1.00$ の場合も同様で、波周期 1.4s 以上の領域では、計算値が実験値を下回る結果となっており、ヒンジ点周りの局所的回転運動するフィンへの抗力抵抗を、適切に表現しうるかという意味では、4.4で述べた手法の限界がみてとれる。ただし、動揺低減効果の定性的傾向は概ね表現出来ており、ロールピーク値の低減特性などの評価には十分実用に耐えうるものと思われる。

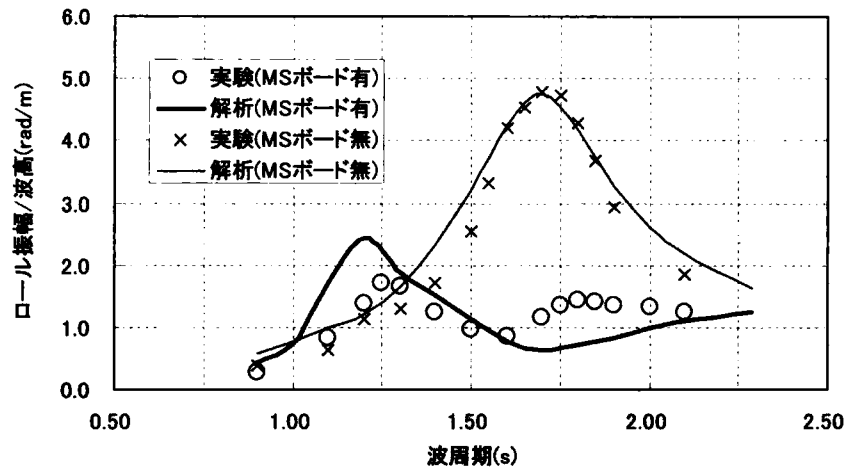


図 4.5.3 MS ボードの動揺低減効果計算結果 (ヒンジ支持型, フィン高さ: 吃水 $\times 0.50$ )

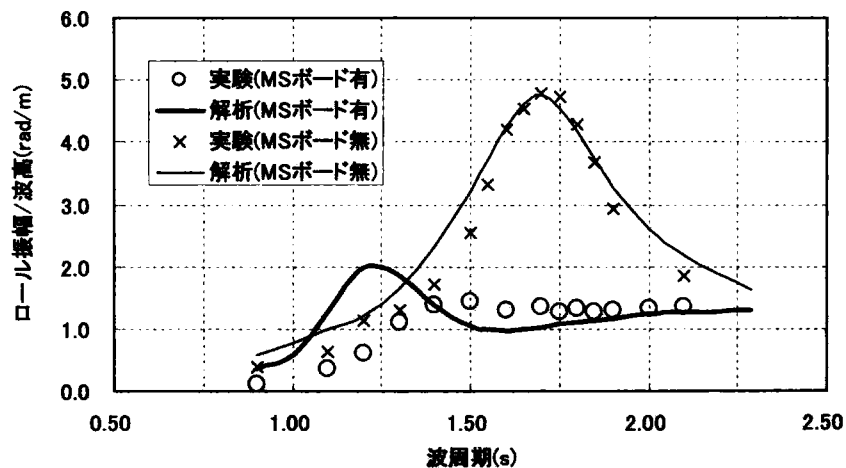


図 4.5.4 MS ボードの動揺低減効果計算結果 (ヒンジ支持型, フィン高さ: 吃水 $\times 1.00$ )

最後に、各形式での応答の様子について計算結果を示す。図 4-5-5 はヒープ固有周期付近の計算結果であるが、ヒンジ式フィンがヒープ運動と連成し大きく振れている。本計算モデルでは、フィンが下図に示したような角度である場合ロールを誘起する方向に波力を受けてしまう。従って、剛支持式に比べてロール応答が大きめな計算結果となっている。

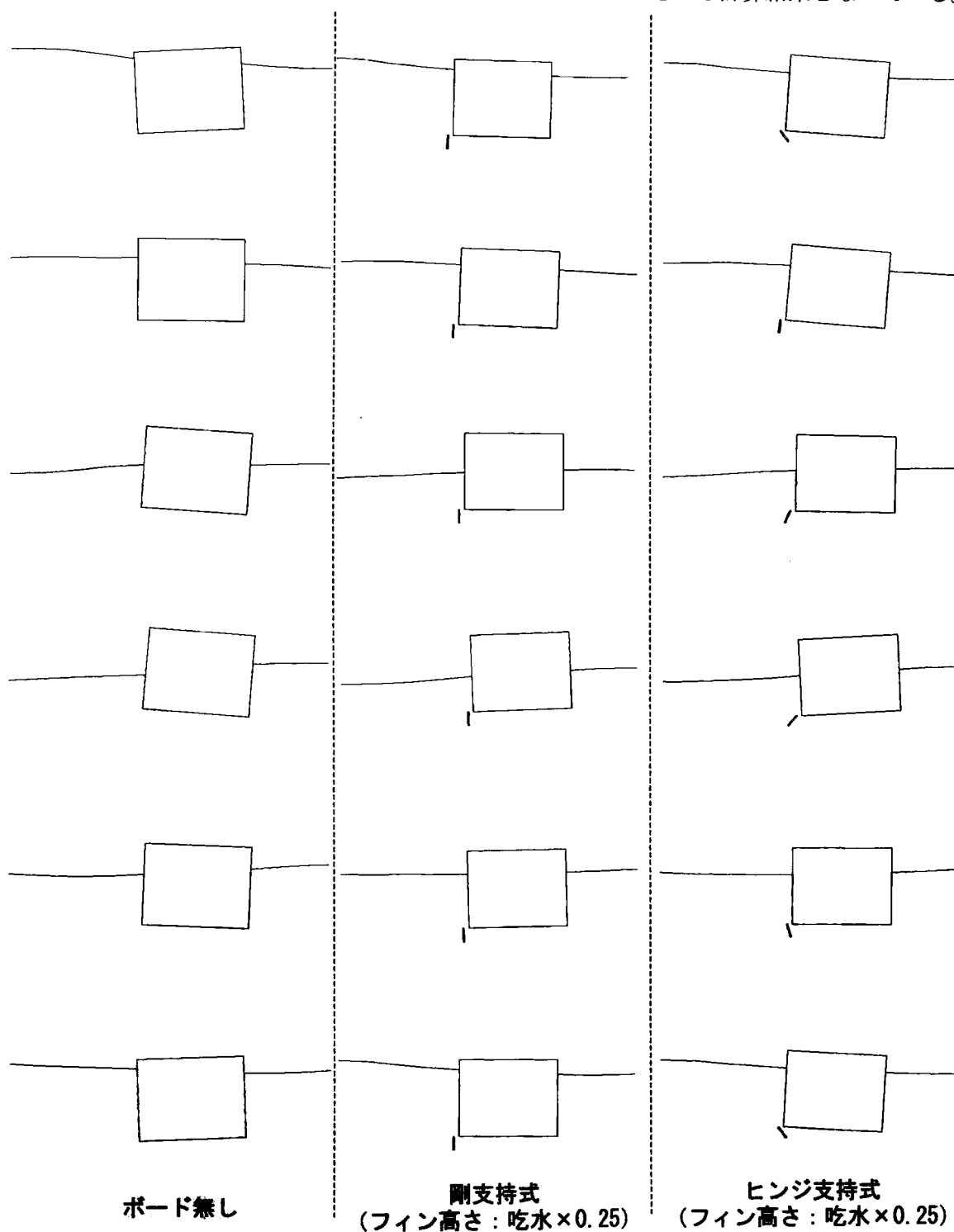


図 4.5.5 浮体応答の様子 (波周期 1.3s : ヒープ固有周期付近)

図 4-5-6 は、ロールの固有周期付近における計算結果であるが、Ms board を付加することで、ロール応答が低減される様子が計算でも再現されている。また、ヒンジ支持式については、図 4-5-5 に比べてフィン振れ角が小さい。こういった場合には、本計算モデルでもロール応答の低減が比較的精度良く評価できている。

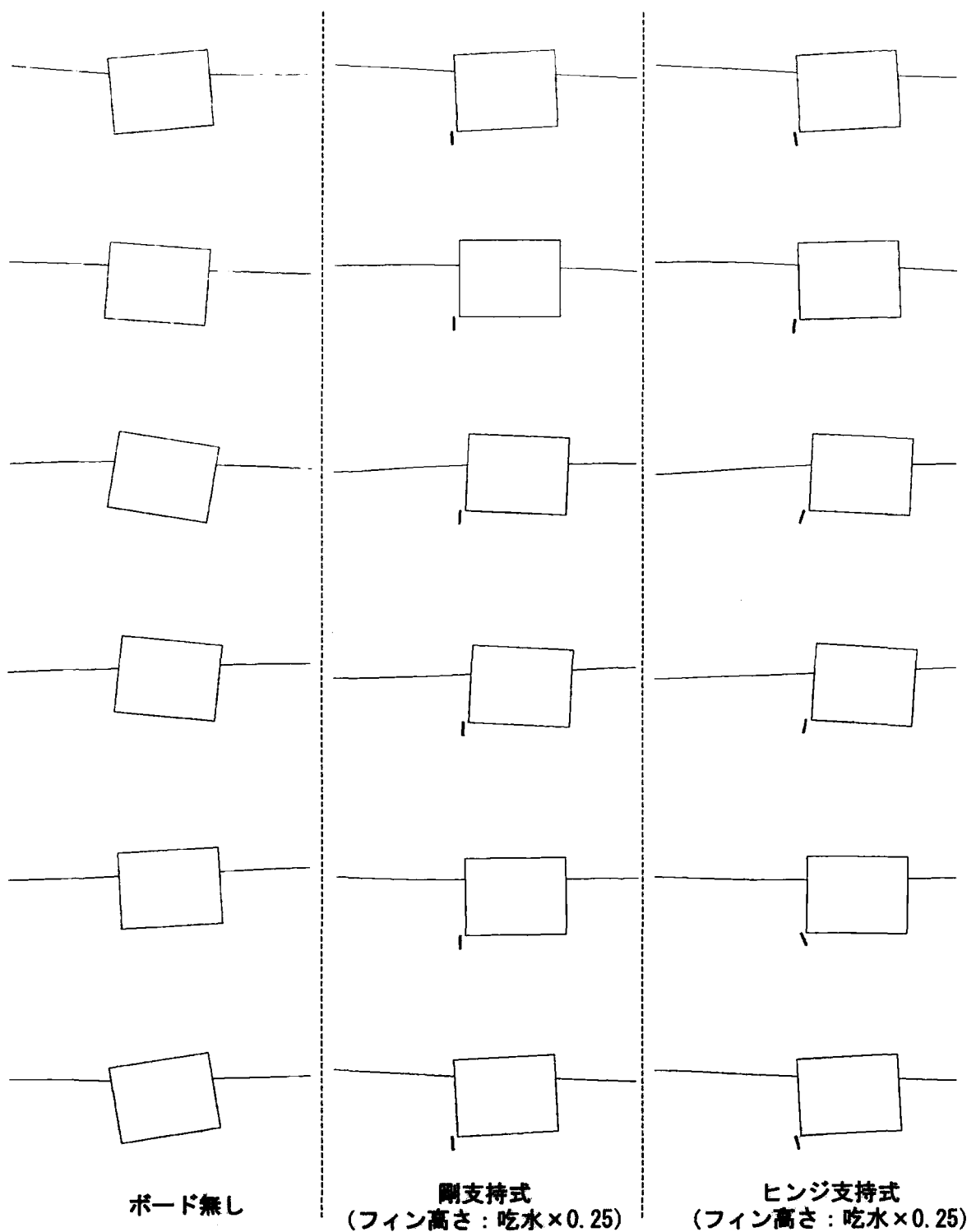


図 4.5.6 浮体応答の様子 (波周期 1.7s : ロール固有周期付近)



## 4. 6 結言

本章では、2. 1 1にて提案した自由表面付流体－浮体の連成計算手法の妥当性について、著者ら<sup>1)</sup>の実験を参考とした検討を行った。以下にまとめを述べる。

- (1) 2. 1 1で提案した計算手法を用いて単純箱形浮体(MS board 無し)の動揺計算を行い、実験結果との比較を行った。浮体応答値や反射波・透過波の周波数特性について、計算値と実験値は良好な一致を示した。また、時刻歴波形についても計算値と実験値は良好な一致を示しており、提案した計算手法にて浮体の過渡応答を精度良く評価可能なことが確認できた。
- (2) フィンに作用する抗力について簡易なモデルを考案し、フィン等の付加された浮体に関する動揺計算手法を構築した。また、本手法による計算結果と実験結果の比較を行い、剛支持式の MS board については、比較的精度良く動揺低減効果が評価可能なことを確認した。
- (3) ヒンジ支持式の MS board については、ピン連結された2剛体の運動に関する定式化を行い、計算アルゴリズムを構築した。これを、フィン等の付加された浮体に関する動揺計算手法に導入し、実験結果との比較を行った。比較の結果、ヒンジ支持式の場合は、浮体に対するフィンの相対運動が付加されるため、剛支持式の場合に比べて動揺低減効果を上手く評価できないことが分かった。特に、フィンの振れ角が大きくなるヒープ固有周期付近では、ロール応答が過大に評価される結果となった。ただし、動揺低減効果の定性的傾向は概ね表現出来ており、ロールピーク値の低減特性等の評価については十分実用に耐えうる手法であるといえる。

## 参考文献

- 1) 池末俊一 田村一美 熊本直樹 松浦正己 西垣亮 木原一禎 津丸徳宏(2004)：浮桟橋の動揺低減技術に関する実験と計算及び実機計測，海岸工学論文集，vol.51，pp.706-710

- 2) (財)沿岸開発技術研究センター (1998) : 「揺れない浮体構造物の研究」 研究報告書, 日本財団, 65p
- 3) 松浦正己・矢野州芳 (2000) : 三菱動揺低減ボード MSboard, 作業船 WORKVESSEL, 第 251 号, pp.16-19
- 4) 池末俊一, 石井元悦, 熊本直樹, 日下理, 大輝聡, 上田茂(2004) : 浮力利用型人工地盤の鉛直地震動作用時における安全性に関する検討, 海洋開発論文集, 第 20 巻, pp1293-1298
- 5) Turgut Sarpkaya and James L. O'Keefe (1995) : Oscillating Flow About Two- and Three-Dimensional Bilge Keels, OMAE 1995, pp.263-270

## 5 自由表面付流体—浮体の連成計算手法に関する特殊形状浮体への適用及び実験との比較

### 5. 1 緒言

2. 1 1で示した自由表面付流体—浮体の連成計算手法について、4では単純箱型浮体による検証を行った。これに対して、本章では、単純箱型浮体に比べ複雑な形状を有する浮体に関して、本計算法の適用性を検討することとした。計算の比較対象としては、著者ら<sup>1)</sup>によるツイン型浮防波堤に関する実験を取り上げることとした。

ツイン浮防波堤の構造形式は、図 5.1.1 に示しているように、2 個の矩体を間隔を空けて平行に配置し、内部に水平フィンを付加したものである。このようにすることで、矩体間のスペース分の製作材料を省き、同一コストでより大きな堤体幅を実現することを狙っている。また、矩体間のスペースによって消波機能が低下するものの、その内部空間に水平フィンを設けることで、消波機能低下を防止する構造となっている。更に、波上側には外部フィンを付加して消波機能の増大を図っている。

このツイン型浮防波堤の構造に関して、4で取り上げた単純箱型浮体との最大の違いは、浮体が2つの矩体で構成され、その間に中間水面を有することである。この中間水面は、浮体運動や外部流体に影響を受けるだけでなく、それ自身の運動が浮体及び外部流体に影響を与えるという相互影響の関係を有している。従って、中間水面の運動を適切に表現出来ていないと、ツイン型浮防波堤の運動や周辺の水面運動は評価が難しい。

本章では、このツイン型浮防波堤について波浪応答計算を実施し、実験結果との比較・検証を行った。



図 5.1.1 ツイン型浮防波堤

## 5. 2 ツイン型浮防波堤の形状影響に関する計算及び実験との比較

著者ら<sup>1)</sup>は、ツイン型浮防波堤における矩体間隔や内部フィン・外部フィンの影響について、1/50 縮尺模型による水槽実験を実施している。本節では、この実験結果との比較によって、本論文の計算手法が、単純箱型浮体とは異なり中間水面を有するような特殊形状の浮体に対しても、その特性を適切に評価可能であるかを検討した。

実験に用いた模型の形状を表 5.2.1 および図 5.2.1 に示す。この実験では、堤体幅  $B$  を実機換算で 25m, 吃水  $d$  を実機換算で 5m とし、1/50 縮尺模型を 7 体製作した。ここで、CASE-1 はツイン型ではなく、従来の単純箱型模型である。また、CASE-2 はツイン型模型でフィン無し、CASE-3 は内部フィンのみを付加した断面である。CASE-4～6 は内部フィン及び外部フィンを付加した断面である。CASE-4 と CASE-6 は矩体間隔及び内部フィン幅の影響、CASE-4 と CASE-5 は外部フィン幅の影響をみるための模型である。

実験条件としては、実機換算で水深 35.0m, 波高 1.25m, 波周期 3s～13s を想定し、相似則にはフルード則を用いた。なお、実験では規則波を造波し、入射波及び透過波の波高

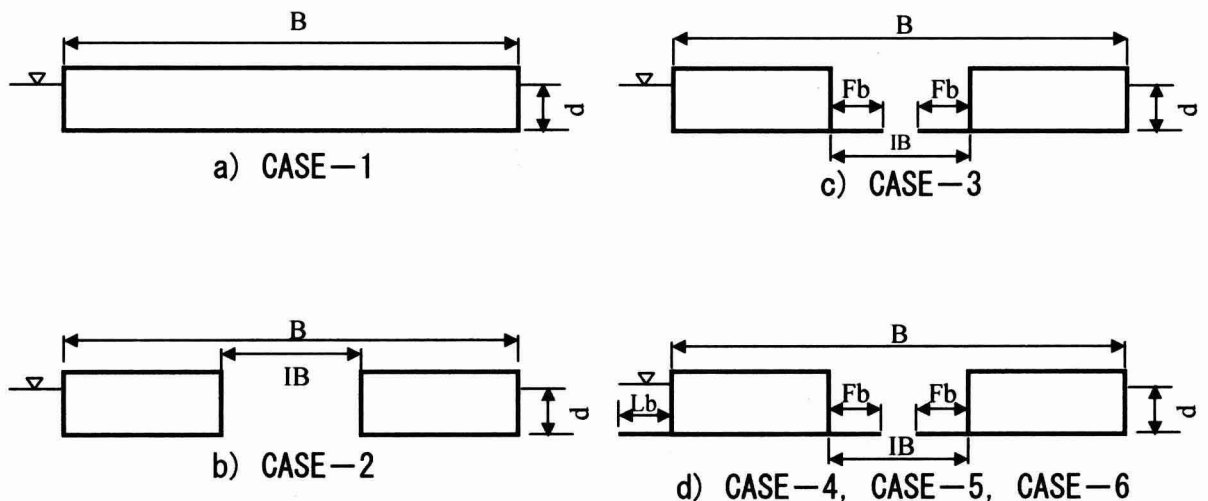


図 5.2.1 模型の断面形状

表 5.2.1 実験模型の断面寸法

	B(m)	d(m)	IB(m)	Fb(m)	Lb(m)
CASE-1	25	5	-	-	-
CASE-2	25	5	10	-	-
CASE-3	25	5	10	4.4	-
CASE-4	25	5	6.3	2.5	2.5
CASE-5	25	5	6.3	2.5	3.8
CASE-6	25	5	10	4.4	2.5

を計測することで各模型の消波性能を検討した。

ツイン型浮防波堤の波浪応答計算に用いた計算モデルを、図 5.2.2 に示す。4 の計算との違いは、浮体を 2 つの矩体で構成し、矩体間の中間水面を表す自由表面境界要素を設けている点である。ツイン型浮防波堤の内部フィン・外部フィンに対しては 4. 4 にて述べた抗力モデルを図 5.2.3 に示す形で作用させることとした。

単純な矩形浮体となる CASE-1 と、フィンが無いツイン型浮体となる CASE-2 について、

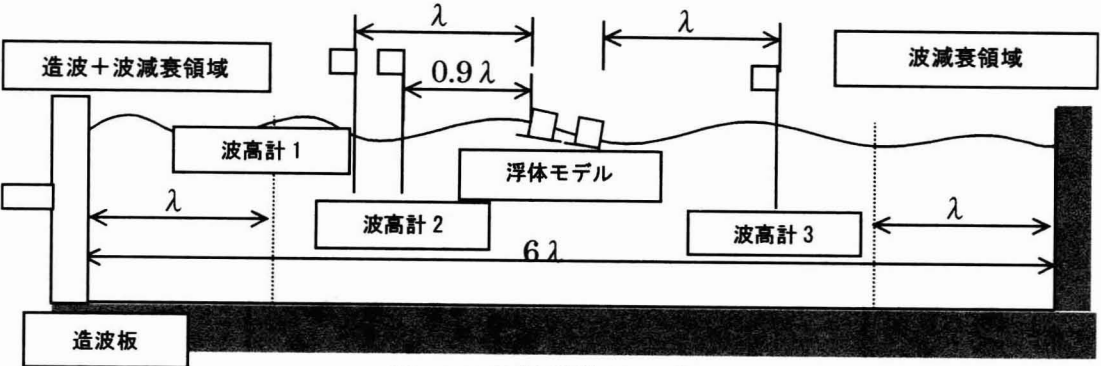


図 5.2.2 比較計算用モデル

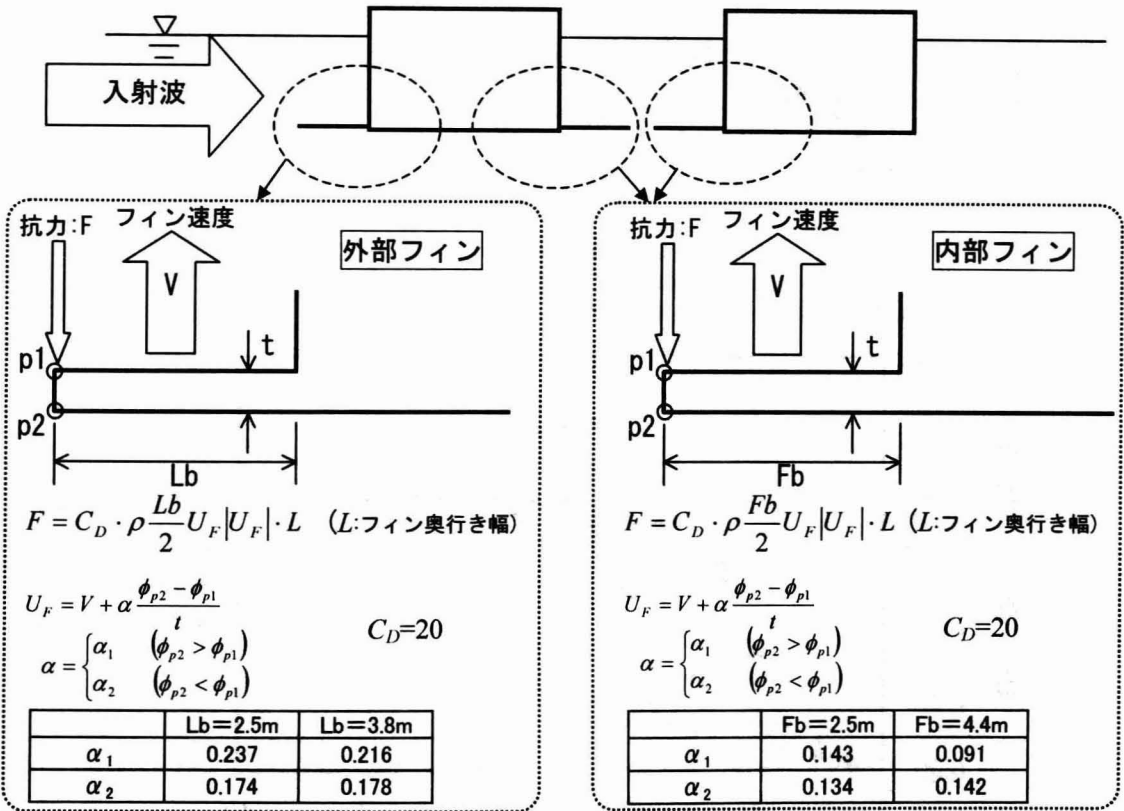


図 5.2.3 フィンへの抗力作用モデル

透過率の実験結果及び計算結果の比較を図 5.2.4 に示す。4 での結果と同様に、単純箱型浮体(CASE-1)については、計算にて透過率を精度良く評価できていることがわかる。フィンの無いツイン型浮体(CASE-2)についても、計算にて比較的精度良く透過率の評価がされている。また、CASE-1 と CASE-2 の透過率の差は、実験・計算共に周期 5.5s~7.0s の領域で生じており、CASE-2 の透過率が CASE-1 に比べて高めの傾向となっている。CASE-1 と CASE-2 の違いは中間水面の有無であり、この周期帯での中間水面の影響が実験・計算で現われているものと考えられる。

CASE-1 と CASE-2 のヒープに関する波浪応答特性を図 5.2.5 に示す。この図より、CASE-2 のヒープ応答曲線は周期 5.5s で一旦ピークとなり、周期 6.0s~7.0s の領域で極端に落ち込む傾向にある。この傾向は、計算でも再現されている。

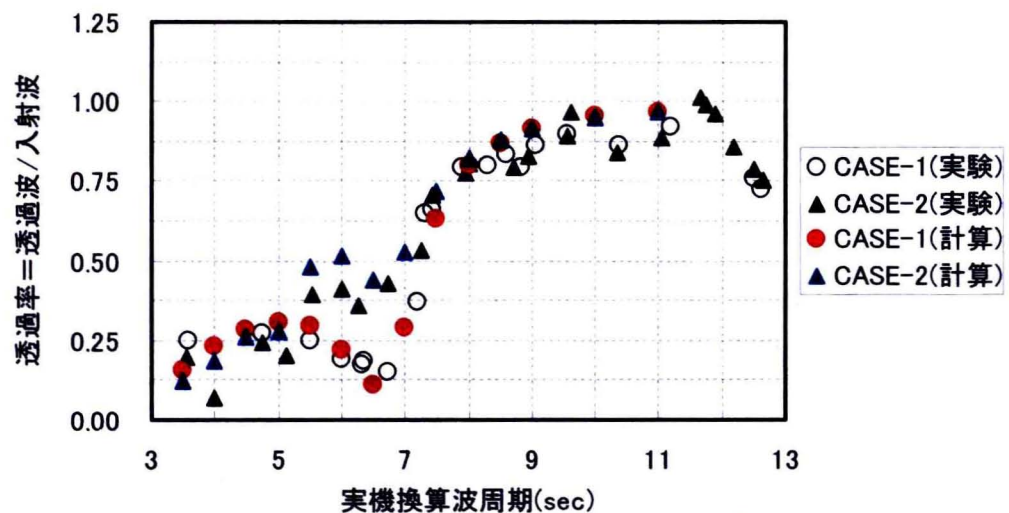


図 5.2.4 透過率の実験結果及び計算結果

※CASE-1：単純矩形浮体，CASE-2：ツイン型浮体（フィン無し）

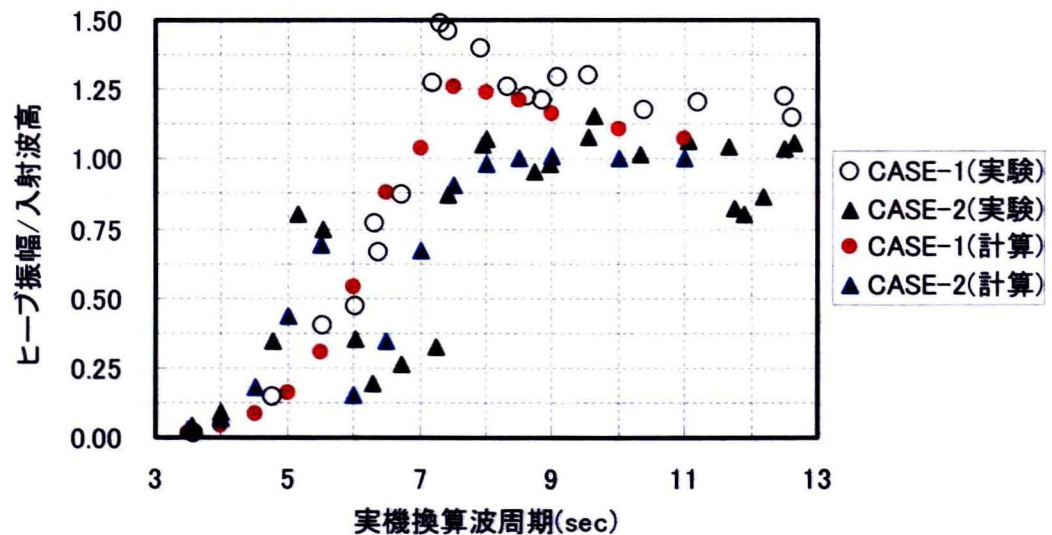


図 5.2.5 ヒープ応答の実験結果及び計算結果

※CASE-1：単純矩形浮体，CASE-2：ツイン型浮体（フィン無し）

CASE-2 のヒープ応答が一旦ピークとなる周期 5.5s とヒープ応答が極小となる周期 6.0s について、各々の応答計算結果を図 5.2.6 に示す。この図より、周期 6.0s の場合には、矩体間の中間水面と外側水面の位置に大きな差が生じている。また、この場合の中間水面と外側水面の運動は逆位相となっており、来襲波によるヒープ方向波力と中間水面運動により発生する鉛直力がキャンセルすることでヒープ応答が小さくなっている。

これに対し、周期 5.5s の場合は、外側水面と中間水面の運動の位相差が小さいため、中間水面運動によるヒープ方向波力のキャンセル分が小さくなるものと考えられる。

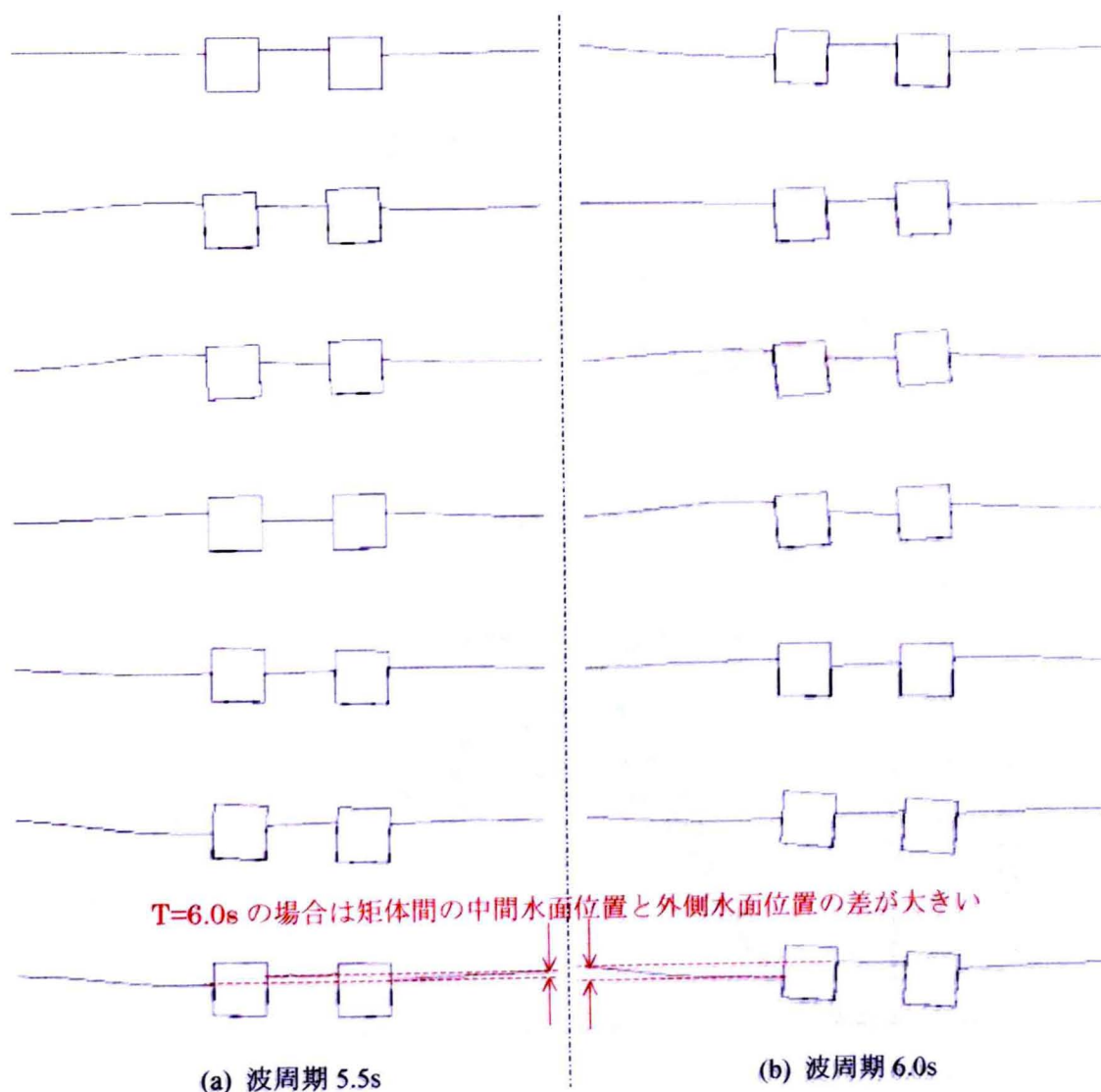


図 5.2.6 CASE-2 の波浪応答計算結果



CASE-1 と、内部フィンのみを有するツイン型浮体である CASE-3 について、透過率の実験結果及び計算結果を図 5.2.7 に示す。この CASE-3 においても、計算結果と実験結果の透過率は良好な一致を示している。また、CASE-2 の場合とは異なり、CASE-3 では波周期 5.5s~7.0s の領域での透過率が、単純箱型浮体である CASE-1 とほぼ同様の特性を示している。図 5.2.8 にはヒープに関する波浪応答特性を示すが、実験・計算ともに CASE-1 と CASE-3 でほぼ同様の特性となっている。これらの結果より、ツイン型浮体に内部フィンを設ける場合は浮体間の中間水面の運動が抑制され、その結果として箱型浮体とほぼ同等の消波特性・応答特性となるものと考えられる。また、その特性は計算にて精度良く再現されている。

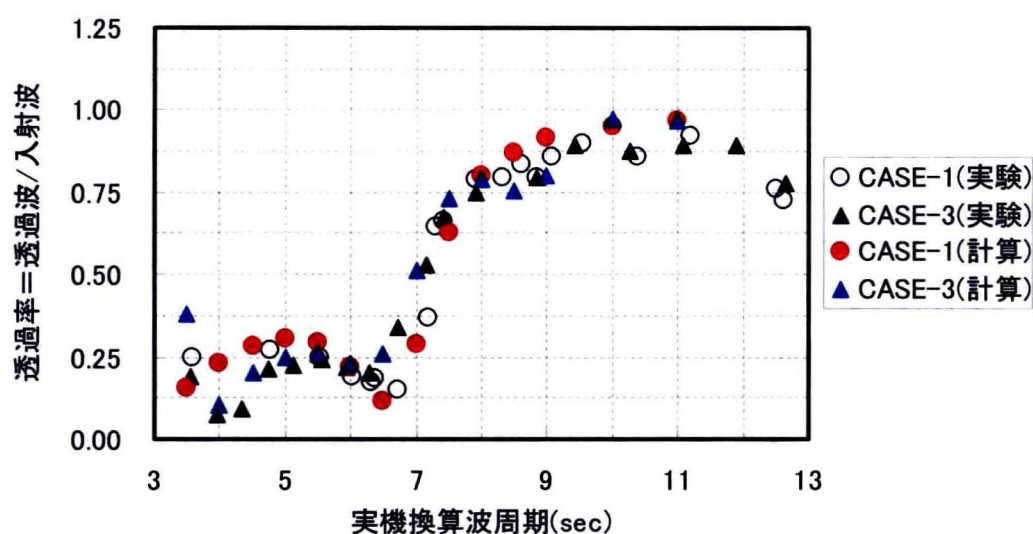


図 5.2.7 透過率の実験結果及び計算結果

※CASE-1：単純矩形浮体，CASE-3：ツイン型浮体（内部フィンのみ付加）

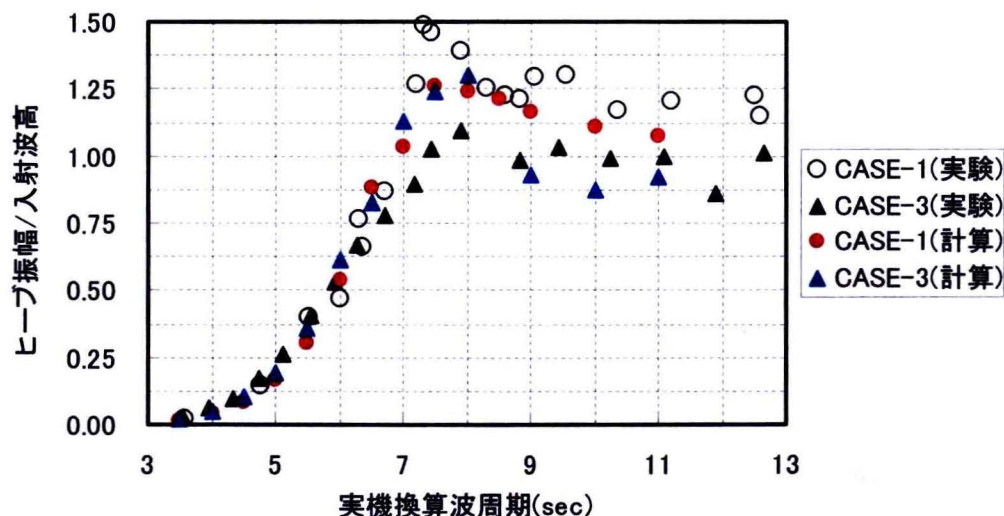


図 5.2.8 波浪応答の実験結果及び計算結果

※CASE-1：単純矩形浮体，CASE-3：ツイン型浮体（内部フィンのみ付加）



波周期 6.0s における CASE-2 と CASE-3 の波浪応答計算結果を図 5.2.9 に示す。ここに、波周期 6.0s では、CASE-2 の透過率が CASE-1 及び CASE-3 に比して大きく、逆にヒープの応答は小さくなる。図に示した応答の様子より、CASE-2 の中間水面は全体的に上下に応答しているのに対し、CASE-3 では内部フィンにより矩体間への流体の流出入が抑制されており、中間水面は局所的に左右に応答するのみであることがわかる。

従って、前述のとおり内部フィンによって中間部水面の応答が抑制されることが、この波周期帯における CASE-3 の消波性能に大きく関係しているといえる。

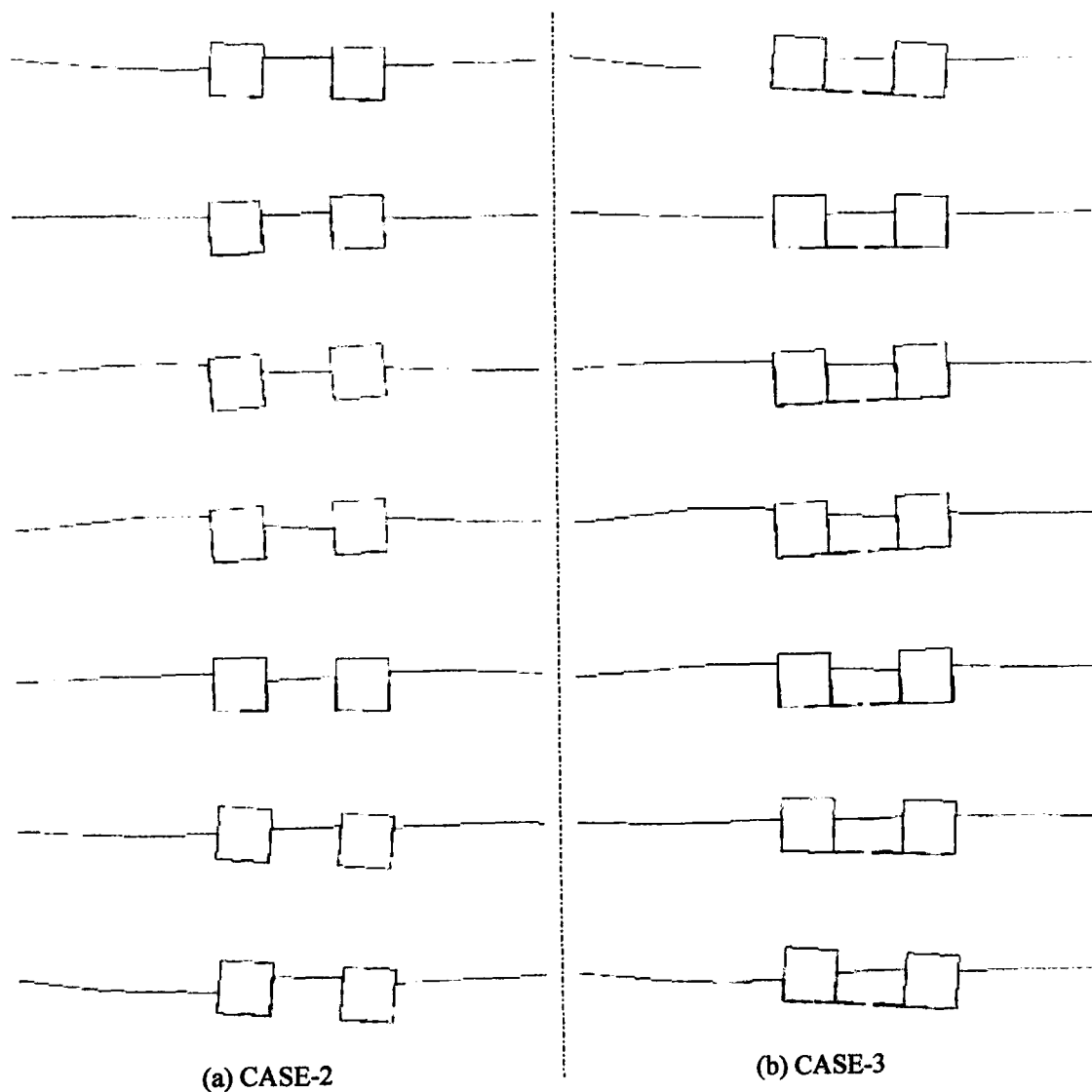


図 5.2.9 CASE-2, CASE-3 の波浪応答計算結果 (波周期 6.0s)

内部フィンのみを有するツイン型浮体の CASE-3, 及び CASE-3 に外部フィンを付加した CASE-6 の実験結果及び計算結果を図 5.2.10 に示す。外部フィンを付加した場合には, 周期 6.0s~9.0s の領域で透過率が小さくなる傾向が, 実験・計算共に現われている。CASE-6 では, 外部フィンがロール応答を抑制し, ロールに起因する透過波が低減されるためである。図 5.2.11 に CASE-3, CASE-6 のロール応答の結果を示すが, 実験・計算共に CASE-6 のロールの応答は CASE-3 から大幅に低減されている。ただし, 実験ではロール応答が周期 8.5s 程度で一旦落ち込むのに対し, 計算では周期 10.0s 程度となっている。このことより, 簡易な抗力モデルでは実際の現象を完全に再現するのが難しいことが分かる。ただし, ロールのピーク値については, 実験と計算が比較的に良好な一致を示している。

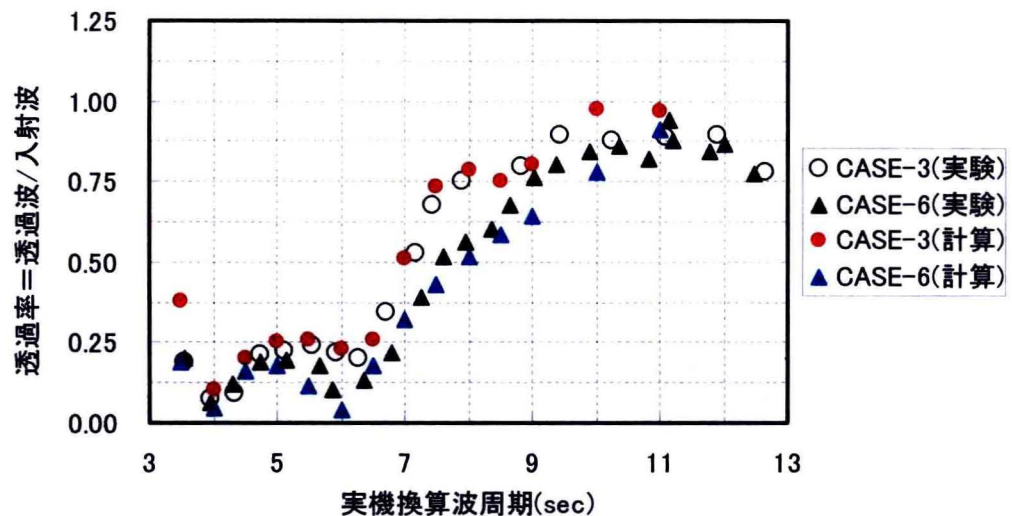


図 5.2.10 透過率の実験結果及び計算結果  
※CASE-3: 外部フィン無, CASE-6: 外部フィン有

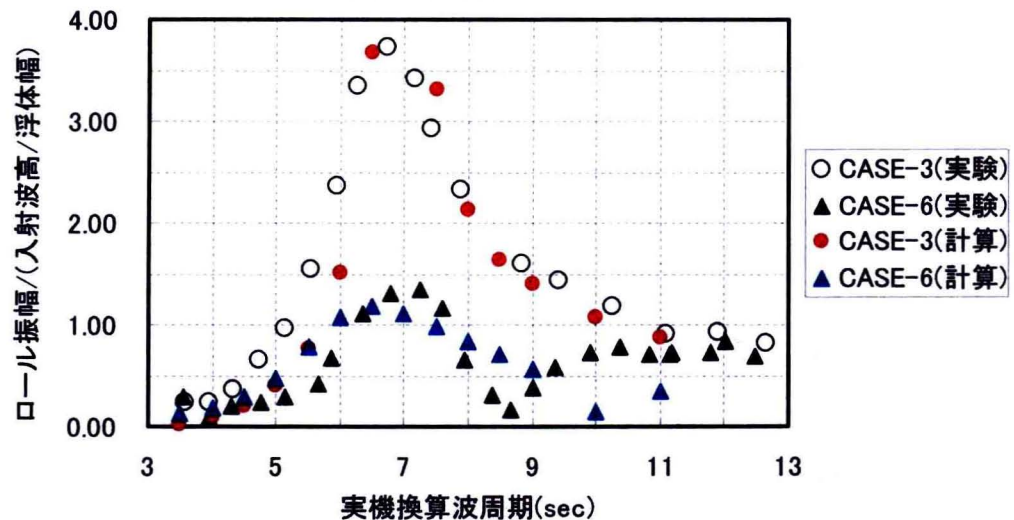


図 5.2.11 波浪応答の実験結果及び計算結果  
※CASE-3: 外部フィン無, CASE-6: 外部フィン有

波周期 7.5s における CASE-3 と CASE-6 の波浪応答計算結果を図 5.2.12 に示す。先述したように、CASE-3 では大きくロールの応答がでているのに対し、CASE-6 ではロール応答が極めて小さいことがわかる。また、浮体自体に作用するロール方向波力を、フィンに作用する波力が打ち消している様子が、計算でも再現されている。

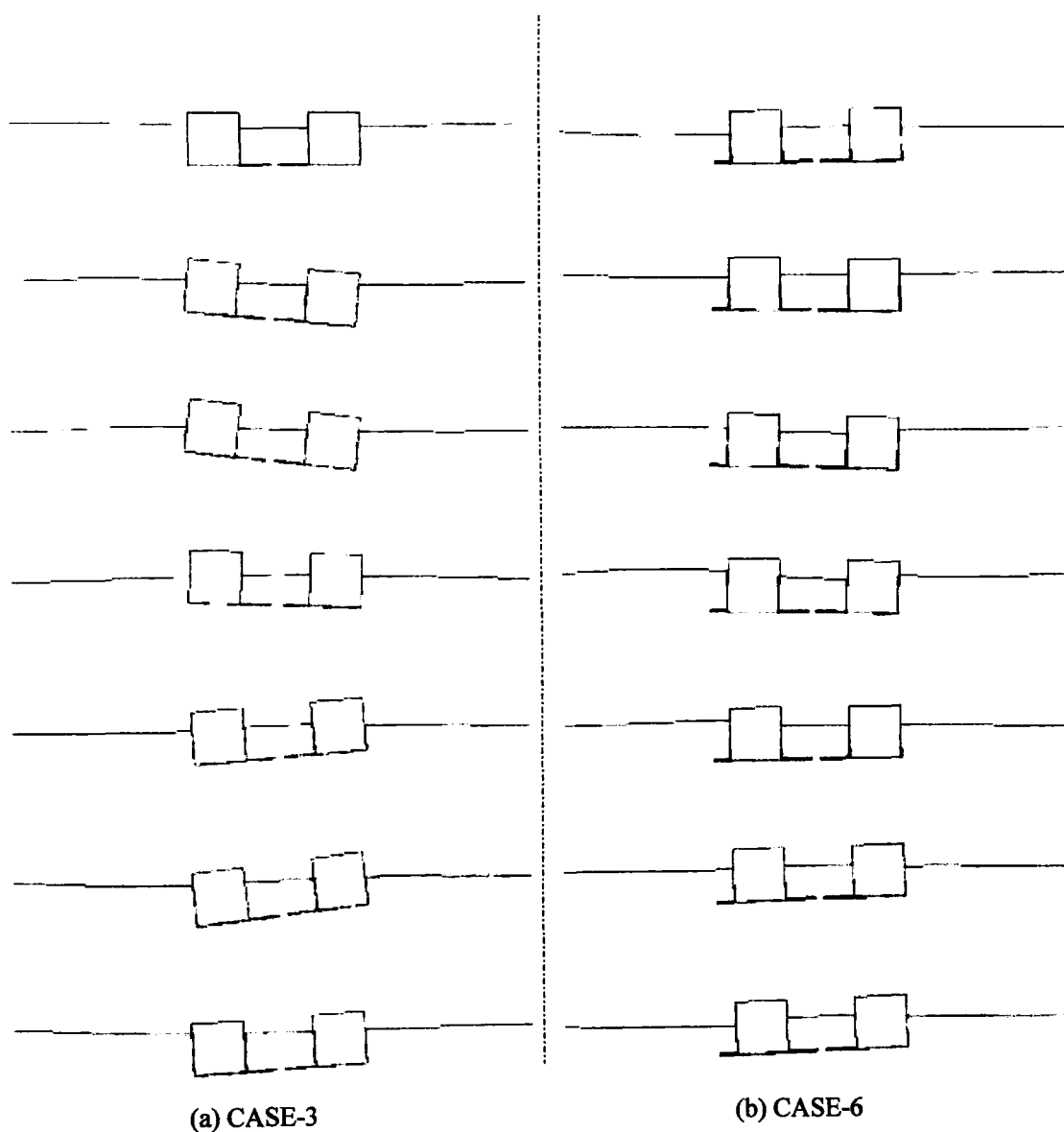


図 5.2.12 CASE-3, CASE-6 の波浪応答計算結果 (波周期 7.5)

矩体間隔及び内部フィンの幅が異なる CASE-4 と CASE-6 の実験結果及び計算結果を図 5.2.13 に示す。実験・計算共に、波周期 4s~6s の領域で CASE-6 が CASE-4 に比べて若干消波性能に優れるものの、全体としては両者に大きな差異はない。従って、矩体間隔・内部フィンの大きさが消波性能にさほど影響せず、計算でもその傾向が精度良く再現できているといえる。

また、外部フィンの幅のみが異なる CASE-4 と CASE-5 の実験結果及び計算結果を図 5.2.14 に示す。この場合には、実験及び計算ともに CASE-4 と CASE-5 の消波性能に全く差が生じない結果となった。この結果と図 5.2.10 の結果より、外部フィンの有無は消波性

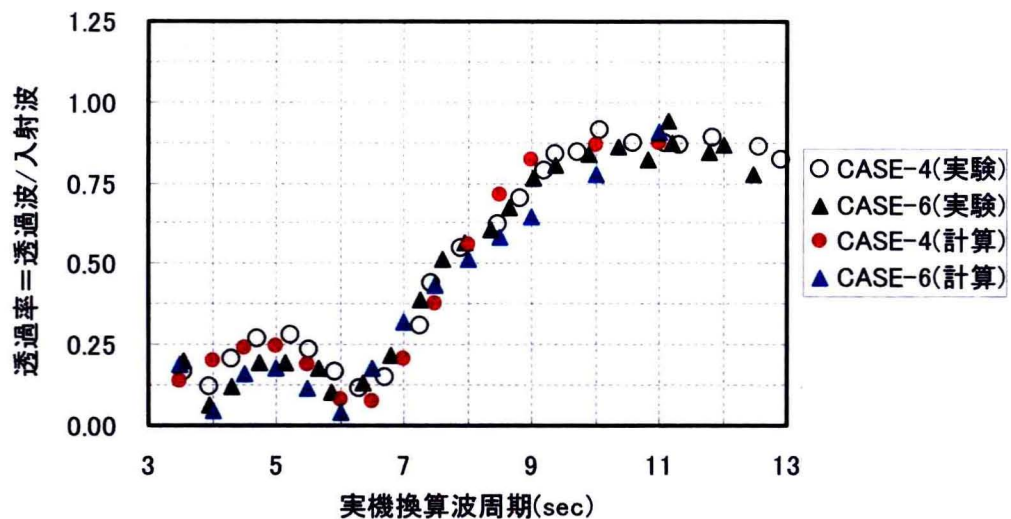


図 5.2.13 透過率の実験結果及び計算結果

※CASE-4：矩体間隔・内部フィン幅 小，CASE-6：矩体間隔・内部フィン幅 大

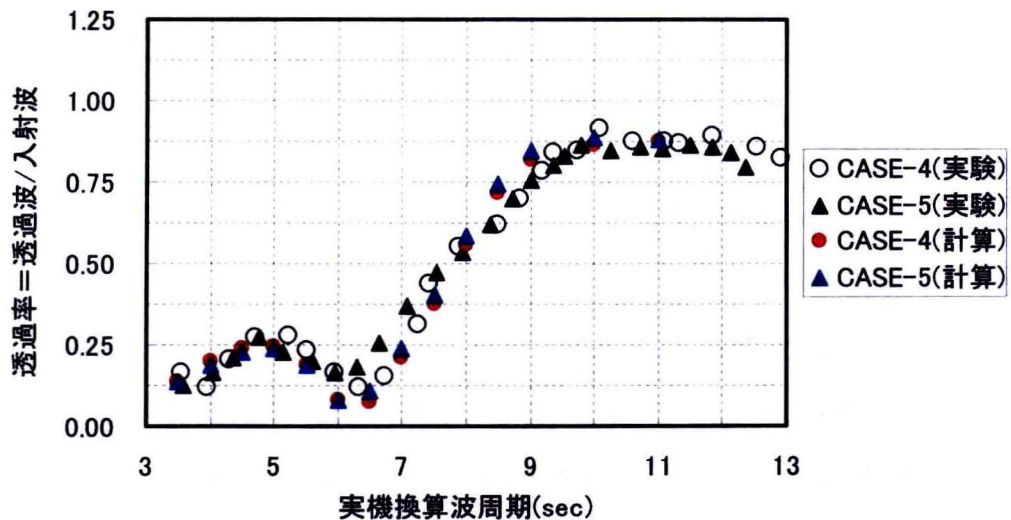


図 5.2.14 透過率の実験結果及び計算結果

※CASE-4：外部フィン幅 小，CASE-5：外部フィン幅 大

能に大きく影響するが、それ自体の幅を過剰に大きくしても効果は無いことがわかる。また、この傾向についても計算にて精度良く再現できている。

### 5. 3 ツイン型浮防波堤の波高影響及び係留条件に関する計算及び実験との比較

前節にて、ツイン型浮防波堤の形状影響に関する特性を本計算法にて精度良く評価可能なことを検討した。本節では、ツイン型浮防波堤について線形計算では評価できない領域を対象とした計算を行い、その適用性を検討した。なお、本検討では、著者ら<sup>1)</sup>が実施したツイン型浮防波堤の波高影響及び係留条件に関する実験を比較対象とした。この実験では、消波効果に優れる CASE-4 の断面形状について、より大きな波高条件下での消波性能を検討するため水槽実験を行っている。また、この実験では係留形式による消波性能の差についても検討を行っている。まず、実験条件及び結果の概要について簡単に述べる。

実験模型の寸法を図 5.3.1 に示す。この実験においても、堤体幅を実機換算で 25m と想定した。また、模型の縮尺は 1/25 とした。実験条件は、実機換算で波高 1.25~3.75m、波周期 4~12s を想定し、相似則にはフルード則を用いた。

本実験では図 5.3.2 に示すように、係留形式としてばね係留とチェーン係留の 2 ケースを考え、係留条件の違いによる消波性能への影響についても検討した。ばね係留の条件では、模型を弱いばねで係留することとし、ばね定数 0.060kN/m のものを用いた。チェーン係留の条件では、実機換算で 132mm のチェーン径を想定し、水中重量が 5.20N/m のものを使用した。また、チェーン長さ 6.45m、底面と浮体側のチェーン固定点間の水平距離は 6.2m となるよう調整した。

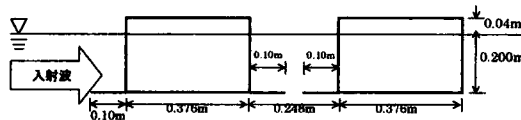


図 5.3.1 実験模型の断面形状  
(模型奥行き方向長さ 1.0m)

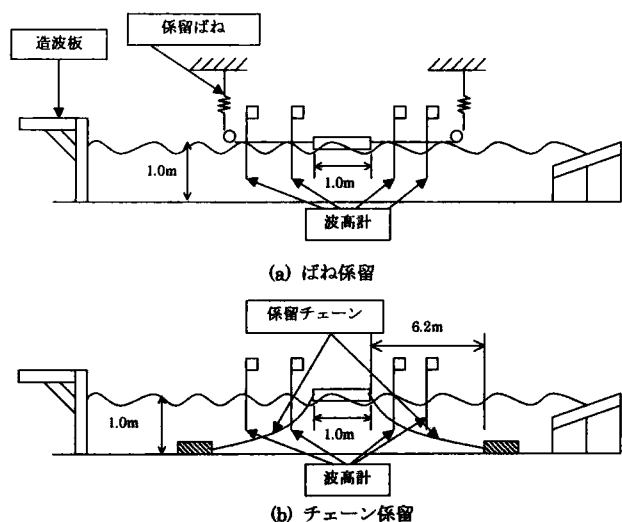


図 5.3.2 模型及び計測機器の配置

計測項目としては、浮体前面に2本の波高計を設置し、合田の入反射分離法<sup>2)</sup>にて入射波高と反射波高を計測し、浮体後方の波高計にて透過波高の計測を行った。ここで、本実験では、浮体上にて越波が生じる懸念があるため、運動量計測装置を用いた浮体応答計測については実施しないこととした。

透過率についての実験結果を図5.3.3に示す。まず、実機波周期9s以上の長周期帯では、透過率が0.80～0.90となっている。また、これらの値は波高によらずほぼ同レベルのものとなっており、この領域では消波性能に対する波高影響が小さいことが分かる。係留形式についても、波周期9s以上の領域では、ばねとチェーンの係留形式の違いによる有為な差は見られないものの、若干チェーン係留の方が透過率が低くなる傾向にある。

実機波周期7s～9sの領域では、透過率が0.80～0.90から0.40程度まで周期が短くなるに従って急激に低下している。この領域でも、透過率に対する波高影響は極めて小さい結果となっている。ただし、係留形式によって透過率特性に差がみられ、チェーン係留の方がばね係留の場合に比して消波性能に優れる結果となっている。チェーン係留では、浮防波堤のヒープ方向・ロール方向の運動に対しても係留力が作用するため、これにより透過波が抑制されたものと考えられる。

実機波周期7s以下の領域では、透過率は周期6s付近で一端落ち込み、これより短い周期帯では0.20程度の値に落ち着く。この実機波周期6s付近の領域では、透過率の波高に対する依存性がみられた。例えば、ばね係留において、実機波周期6.4sの場合をみると、実機換算波高3.75m、2.50m、1.25mに対し透過率が0.21、0.16、0.11となっており、透過率と波高が比例関係にある。ただし、この波周期では浮体後方へ到達する越波が発生しており、それも透過率の変化に影響しているものと推測される。

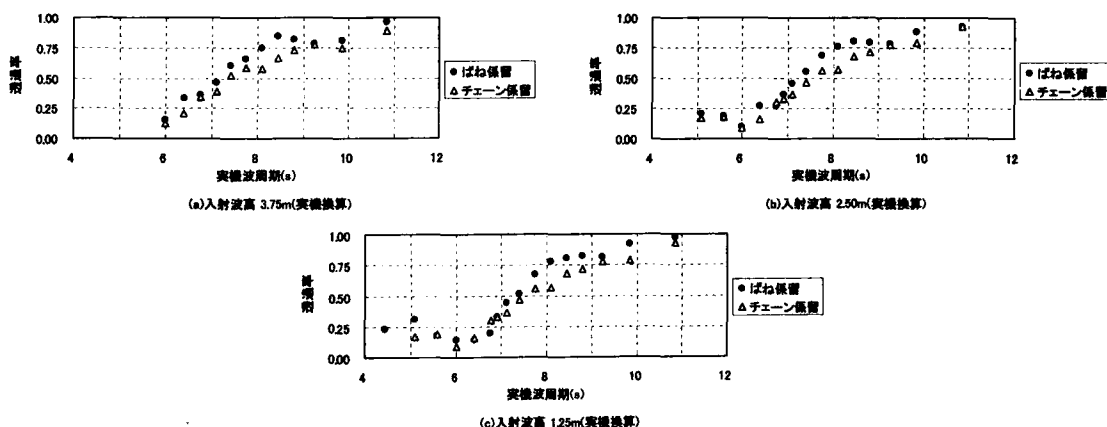


図 5.3.3 透過率計測結果(CASE-4, 縮尺 1/25)

反射率についての実験結果を図5.3.4に示す。波高が1.25mで波周期が7s以下の場合は、係留形式の違いによる反射率の傾向にほとんど差がない。しかし、CASE-4の波周期7s以上の領域では波高によらず反射率に差が生じており、チェーン係留の場合の反射率がばね係留の場合に比べて高くなっている。

波周期6s以下の領域においては、実機換算波高1.25mの場合に反射率が0.60～0.80であるが、波高が2.50mの場合には0.40～0.60となり波高による影響がみられた。これは、実機換算波高2.50mの場合には、模型前面で越波が発生しているためである。また、チェーン係留の場合の方が運動を拘束されている分だけ越波量が多く、反射率がばね係留の場合に比べて低い結果となっている。ただし、この領域における越波水塊は、ツイン型矩体間にほとんどが流入しており、越波の透過波に対する直接的影響は観察されなかった。

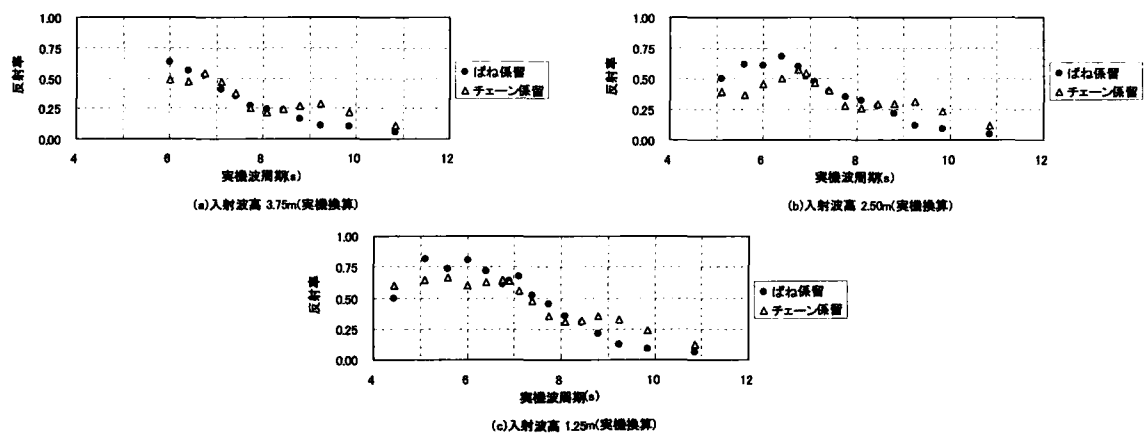


図 5.3.4 反射率計測結果(CASE-4, 縮尺 1/25)

次に、本論文で提案した計算法を用い、これらの実験結果との比較を行った。その計算モデルを図5.3.5に示す。計算では、計算領域長さを6波長分、水深を実験と同様に1.0mとした。また、図に示すように、浮防波堤のモデルは計算領域の中央に配置し、計算領域の両端には、反射波を吸収するために波減衰領域を設けた。この波減衰領域の長さは1波長分とした。

浮体の係留についても実験と同様にばね係留とチェーン係留の2通りを実施した。ばね係留の場合は実験と同様、水平方向にばね定数0.060kN/mのばねで係留した状態とした。

チェーン係留の場合についても、実験と同様にチェーン長さ6.45m、底面と浮体側のチェーン固定点間の水平距離は6.2mとした。ここで、係留チェーンの挙動については、図5.3.6のようにチェーンを集中質点列として表現し、各々の隣接する質点間にはその変位に応じて張力が作用するモデルを考えた。チェーンの運動計算について以下に述べる。



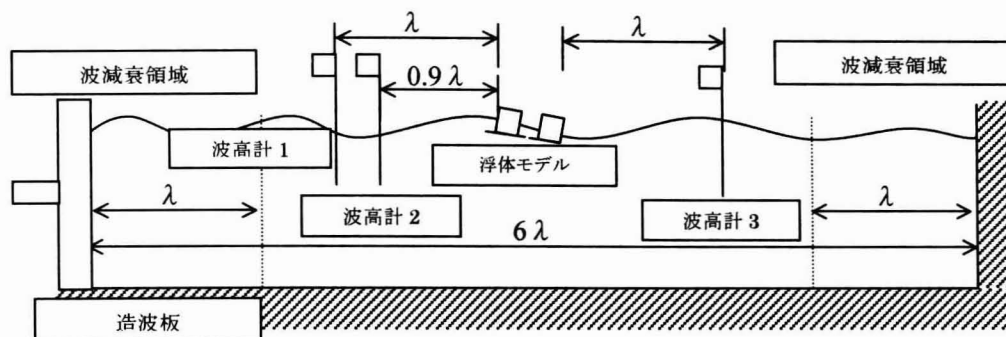


図 5.3.5 計算モデル模式図（図中の $\lambda$ ：波長，水深 1.0m）

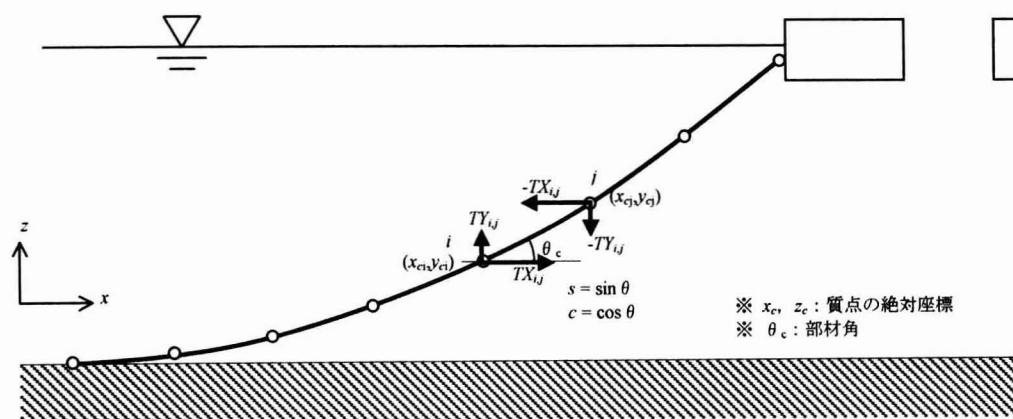


図 5.3.6 チェーンのモデル化概要（2 質点間の張力）

まず，チェーンの質点列について，運動方程式を次式のようにした。

$$\mathbf{m}_c \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{c}_c \cdot \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}_c = \mathbf{f}_c \quad (5-3-1)$$

ここに， $\mathbf{x}_c$  は質点列の変位ベクトル， $\mathbf{f}_c$  は質点列へ作用する外力のベクトルであり， $\mathbf{m}_c$  は質量マトリクス， $\mathbf{c}_c$  は減衰マトリクス， $\mathbf{k}_c$  は剛性マトリクスを表している。

式(5-3-1)中の質量マトリクス  $\mathbf{m}_c$  については，単純な対角行列となる。剛性マトリクス  $\mathbf{k}_c$  は，隣接する質点間に作用する張力を表現し，チェーンの幾何学的状態により変化するものである。ここで，ある 2 質点間に作用する張力について，図 5.3.6 に示す変数を用いて以下のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} -TX_{i,j} \\ -TY_{i,j} \\ TX_{i,j} \\ TY_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{ci,j} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ x_{ci+1} \\ y_{ci+1} \end{bmatrix} - \mathbf{k}_{ci,j} \begin{bmatrix} -c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -sc & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & sc \\ 0 & 0 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ci,j}c \\ L_{ci,j}s \\ L_{ci,j}c \\ L_{ci,j}s \end{bmatrix} \quad (5-3-2)$$

$L_{ci,j}$  は要素の自然長である。式(5-3-2)は、任意方向に傾いた軸力部材の剛性方程式である。また、右辺第1項は質点の絶対座標で表現されており、右辺第2項を加えることで要素の自然長からの伸びに対する張力となる。運動方程式(5-3-1)では式(5-3-2)の右辺第1項が剛性を表す  $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}_c$  に相当し、右辺第2項は外力項  $\mathbf{f}_c$  に付加される。

チェーンの場合には圧縮力は作用しないため、チェーンの幾何学的状態により  $k_{ci,j}$  を以下のように操作することとした。

$$\left. \begin{aligned} k_{ci,j} &= \frac{E_{i,j} A_{i,j}}{L_{i,j}} & (L'_{ci,j} \geq L_{ci,j}) \\ k_{ci,j} &= 0 & (L'_{ci,j} \leq L_{ci,j}) \end{aligned} \right\} \quad (5-3-3)$$

$$L'_{ci,j} = \sqrt{(x_{ci} - x_{cj})^2 + (y_{ci} - y_{cj})^2}$$

$E_{ci,j}$ ,  $A_{ci,j}$  は質点  $i, j$  間を結ぶ要素のヤング率及び等価な断面積であり、 $L'_{ci,j}$  はチェーンのある幾何学状態における2質点間の距離を表している。この式(5-3-3)により、緩んだ状態では圧縮力が作用せず、緊張した状態では引張力が作用する現象をモデル化している。この2質点間における剛性方程式を重ね合わせることで、ある時刻の幾何学状態におけるチェーン全体の剛性マトリクス  $\mathbf{k}_c$  が作成できる。

減衰マトリクス  $\mathbf{c}_c$  については剛性比例型を用い、計算で生ずるチェーンの高次振動を抑制することとした。また、チェーン質点へ作用する外力としては、重力、浮力及び波浪外力が考えられるが、浮防波堤モデルの波浪外力受圧面に比してチェーンの受圧面は十分小さいため、今回の計算では重力、浮力のみを考慮することとした。

チェーンの水底面への接地については、各質点に次式のような鉛直方向付加外力  $f_i$  を与えてその影響を考慮した。

$$\left. \begin{aligned} f_i &= -k_i \cdot (y - h_a) - c_i \cdot \dot{y} & (y < h_a) \\ f_i &= 0 & (y \geq h_a) \end{aligned} \right\} \quad (5-3-4)$$

ここに、 $h$  は水底面を  $y=0$  とした場合に付加外力が有効となる高さであり、水深に比して十分に小さい値を設定する必要がある。また、 $k_i$  はチェーン質点重量との静的な力の釣り合いが、水底面上 ( $y=0$ ) で満たされるよう設定されたバネ定数である。ところで、水底面付近 ( $y < h_a$ ) では接地を表すためのばね力が付加されるが、このばね力によりチェーン質点の上下振動が発生する(特に、チェーンが鉛直下方に運動し接地した場合)。式(5-3-4)の  $c_i$  は、この振動を減衰させるために便宜的に設けられた減衰係数である。

チェーンの運動計算としては、式(5-3-1)～(5-3-4)に述べた基礎式を用い、Newmark- $\beta$ 法による計算を行った。以下、チェーン計算におけるNewmark- $\beta$ 法の定式化について述べる。

2章で示したように、Newmark- $\beta$ 法では、現タイムステップと次タイムステップ質点変位・速度・加速度の関係を以下で定義する。

$$\dot{\mathbf{x}}_c^{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_c^n + dt \left\{ \alpha \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} + (1-\alpha) \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} \quad (5-3-5)$$

$$\mathbf{x}_c^{n+1} = \mathbf{x}_c^n + dt \cdot \dot{\mathbf{x}}_c^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} + (1-2\beta) \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} \quad (5-3-6)$$

式(5-3-5), (5-3-6)を式(5-3-1)に代入し、次タイムステップにおける力の釣り合い状態を表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_c \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{c}_c \cdot \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x}_c &= \mathbf{f}_c \\ \rightarrow \mathbf{m}_c \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} + \mathbf{c}_c^{n+1} \cdot \left\{ \dot{\mathbf{x}}_c^n + dt \left\{ \alpha \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} + (1-\alpha) \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} \right\} \\ + \mathbf{k}_c^{n+1} \cdot \left\{ \mathbf{x}_c^n + dt \cdot \dot{\mathbf{x}}_c^n + \frac{1}{2} dt^2 \left\{ 2\beta \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} + (1-2\beta) \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} \right\} &= \mathbf{f}_c^{n+1} \end{aligned} \quad (5-3-7)$$

式(5-3-7)を $\ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1}$ について整理すると、次タイムステップの質点の加速度は次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_c^{n+1} &= \mathbf{A}_c^{-1} \cdot \mathbf{B}_c \\ \mathbf{A}_c &= \left\{ \mathbf{m}_c + \alpha \cdot dt \cdot \mathbf{c}_c^{n+1} + \beta \cdot dt^2 \cdot \mathbf{k}_c^{n+1} \right\} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{f}_c^{n+1} - \mathbf{c}_c^{n+1} \cdot \left\{ \dot{\mathbf{x}}_c^n + (1-\alpha) dt \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} - \mathbf{k}_c^{n+1} \cdot \left\{ \mathbf{x}_c^n + dt \cdot \dot{\mathbf{x}}_c^n + \frac{1-2\beta}{2} dt^2 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_c^n \right\} \end{aligned} \quad (5-3-8)$$

ここで、 $\mathbf{A}_c$  マトリクス、 $\mathbf{B}_c$  ベクトルの計算には、次タイムステップのマトリクス  $\mathbf{k}_c$ ,  $\mathbf{c}_c$  が含まれているため、式(5-3-8)は非線形の計算となる。従って、今回は図 5.3.7 に示す収束計算のフローにて計算を行った。

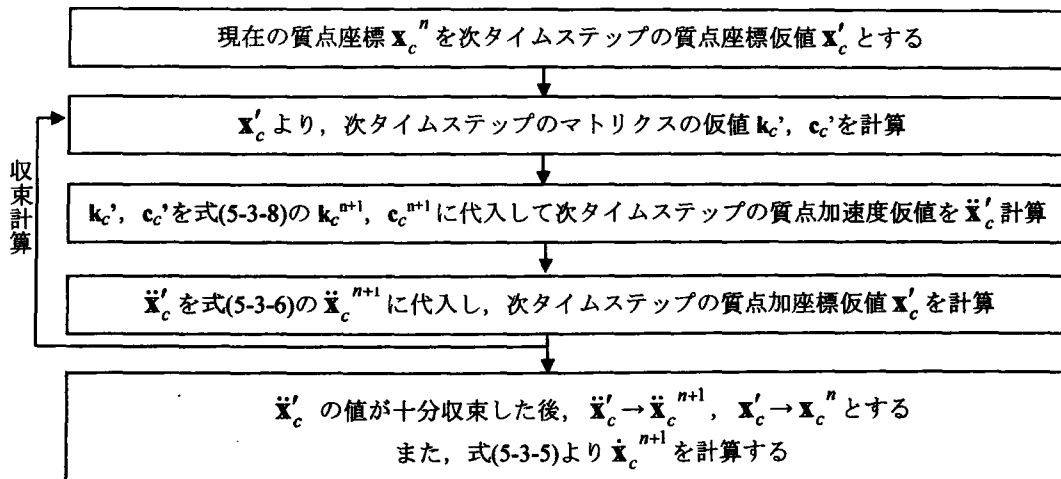


図 5.3.7 チェーン運動の非線形計算フロー

このチェーン挙動の計算手法について、試計算を行った。計算の初期状態として、水底面から 1.0m の高さに設けた固定点からチェーンが鉛直下方に垂れ下がった状態で、水底面に接地しているものと仮定した。計算開始後は、水底面に接地している側のチェーン自由端に水平力を負荷し、そのときのチェーンのカテナリー状態を時刻歴で計算した。図 5.3.8 にチェーン挙動の試計算結果を示すが、水平力を加えることで垂れ下がった状態から、水底面まで弧を描くような形状へと変化している様子が定性的に計算できている。

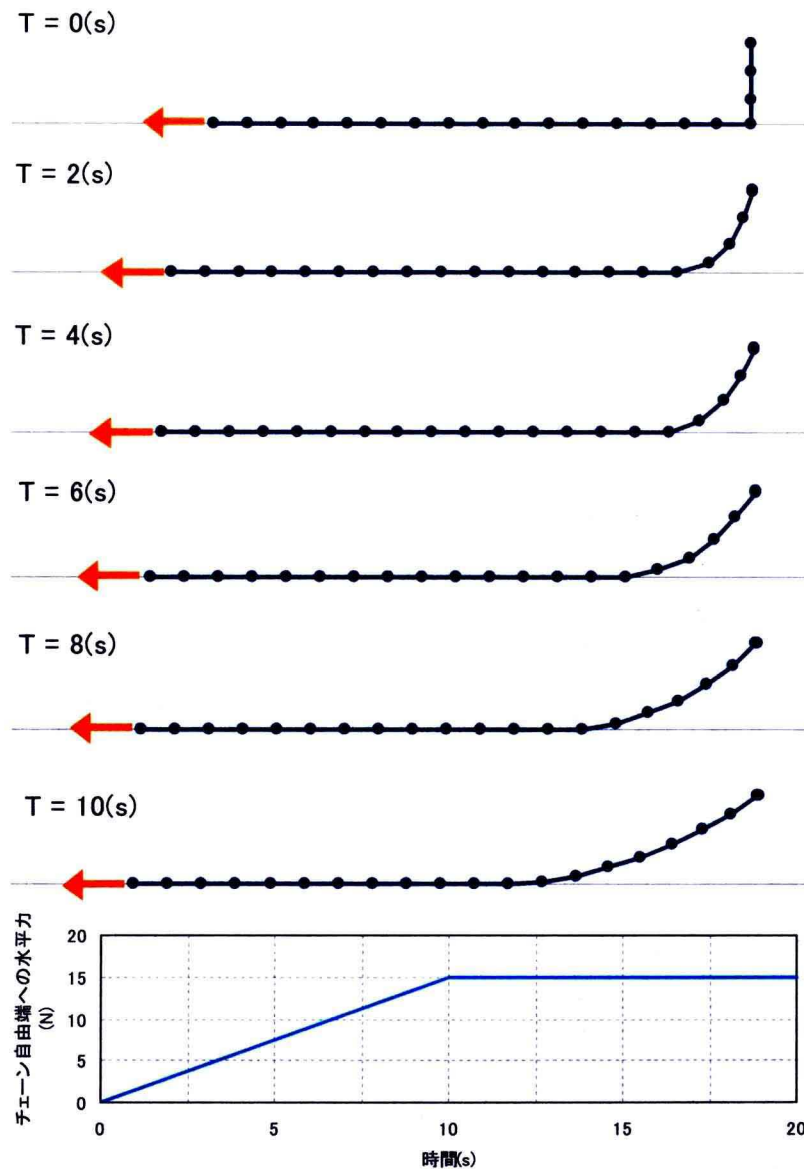


図 5.3.8 鉛直下方に垂れ下がった状態で水平力を付加した際のチェーン挙動計算結果  
(チェーン長さ: 6.45m, チェーン水中重量: 52N/m, チェーン固定点の水底面からの高さ: 1.0m)

ここで、静的に力が釣り合っている状態での、チェーンのカテナリー曲線理論値<sup>3)</sup>は次式で表される。

$$\begin{cases} z_c = h - \left\{ s \cdot \sinh \frac{y}{a_0} - (a_0 + h) \cosh \frac{y}{a_0} + a_0 + h \right\} & (y \leq y_q) \\ 0 & (y > y_q) \end{cases} \quad (5-3-9)$$

$$a_0 = TH/(w \cdot g) \quad s = \sqrt{h(h + 2a_0)} \quad y_q = \sinh^{-1}(s/a_0)$$

$z_c$  は水底面からの高さ、 $y$  はチェーン固定点からの水平距離、 $h$  はチェーン固定点の水底面からの高さ、 $w$  はチェーンの単位長さ当たりの水中重量である。また、 $TH$  は固定点に作用するチェーン張力の水平方向成分であり、チェーン自由端に加えられている水平力と等価なものである。十分時間が経った状態における計算結果と理論値の比較を図 5.3.9 に示す。カタナリー曲線の計算結果と理論値は良好な一致を示しており、今回のチェーン計算方法が妥当であることが確認できた。

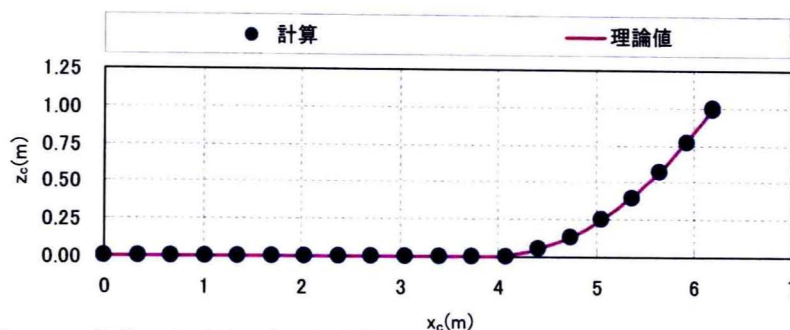


図 5.3.9 静的に力が釣り合った状態でのチェーンカタナリー理論値と計算の比較  
(チェーン長さ：6.45m, チェーン水中重量：52N/m, チェーン固定点の水底面からの高さ：1.0m)  
(チェーン自由端の水平力：15N)

このチェーン計算と浮体運動計算の連成計算については、図 5.3.10 の計算フローにて行った。

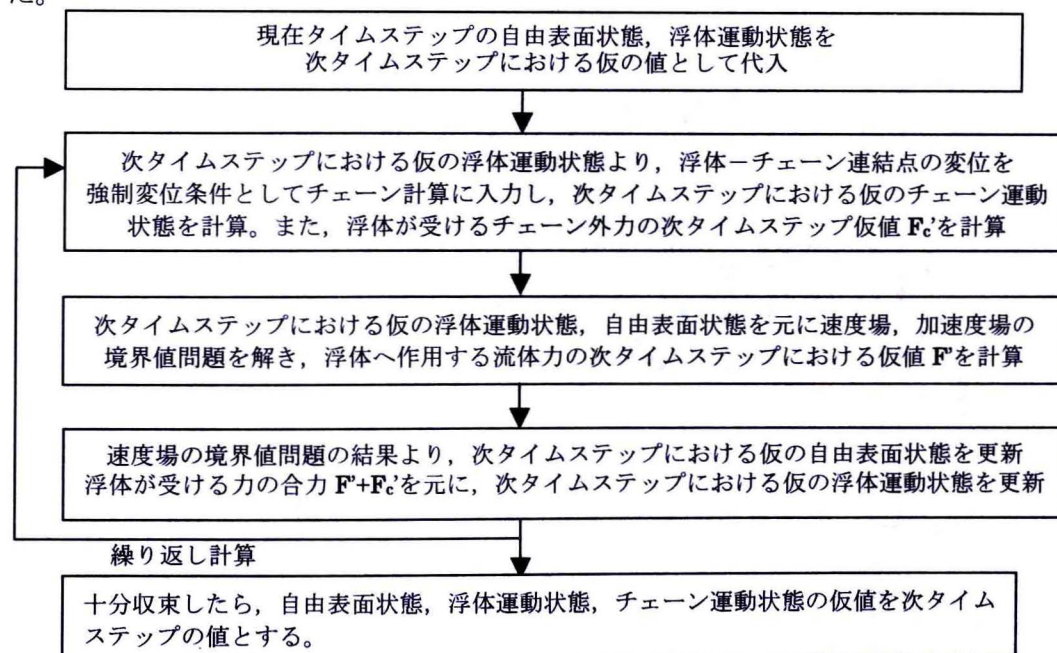


図 5.3.10 浮体のチェーンの連成計算フロー



浮体へ作用するチェーン外力については、取付リングにおけるチェーン張力及びチェーン・リング間の摩擦力を図 5.3.11 に示すように作用させた。また、摩擦係数  $\mu$  については 0.15 を用いた。

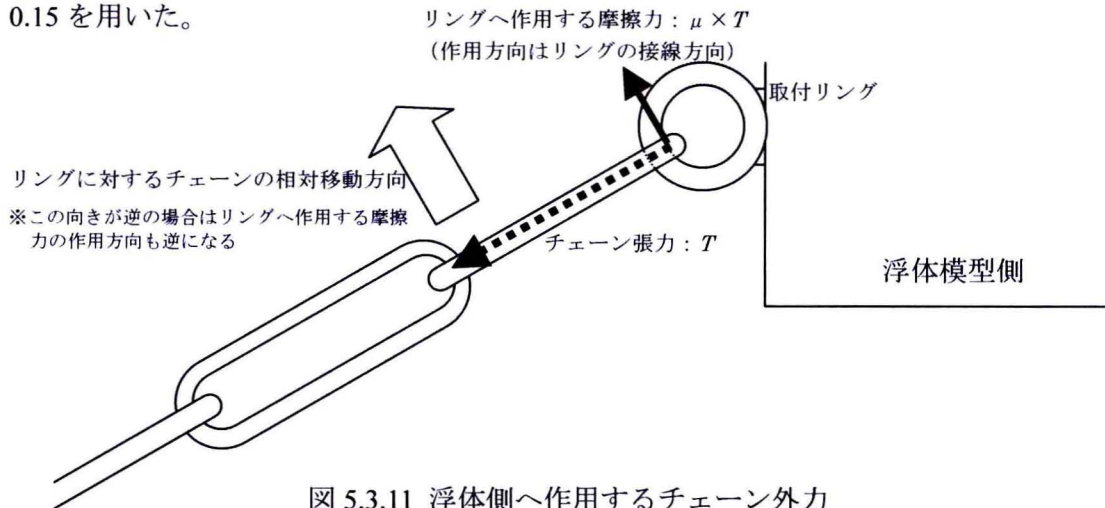


図 5.3.11 浮体側へ作用するチェーン外力

以上述べた計算方法により、ツイン型浮防波堤の透過率・反射率を計算した。その結果と実験値との比較を図 5.3.12 に示す。

実験では、波周期 7s 以上の領域にてチェーン係留の場合がばね係留の場合に比して、透過率が低くなる傾向となったが、計算でも同様の傾向となっている。

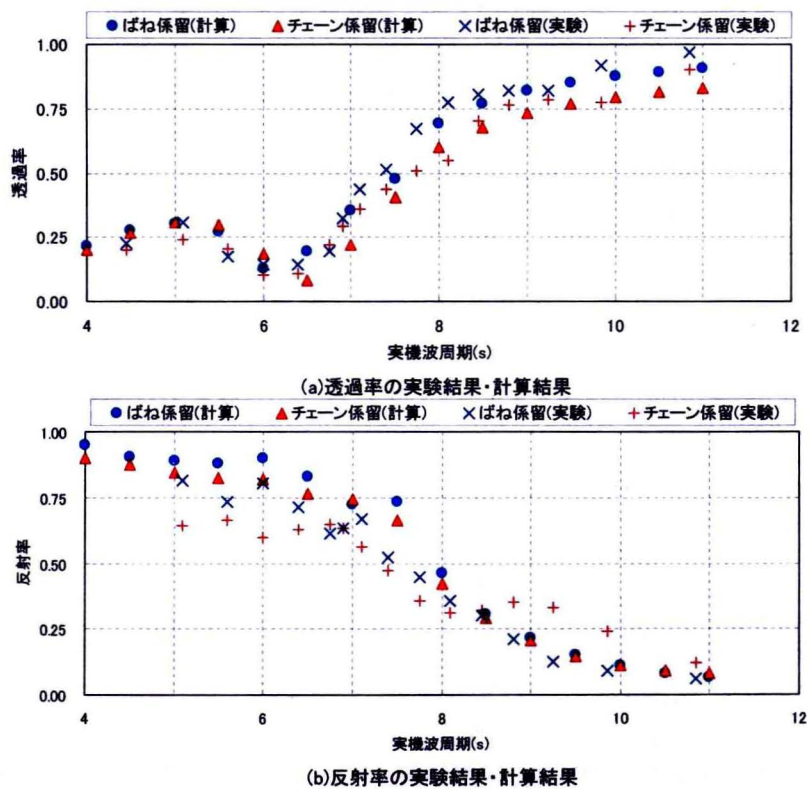


図 5.3.12 ばね係留・チェーン係留時の透過率・反射率に関する実験-計算結果比較

ただし、波周期 8.5s 以上の領域でチェーン係留の場合がばね係留の場合に比して反射率が高くなる傾向となったのに対し、計算では両者の差がほとんどなかった。実験結果にて、チェーン係留の反射率が高くなる明確な原因は不明である。ただし、推測ではあるものの、この波領域ではチェーン自体に作用する波流体力が、浮体の運動に対して無視できない大きさとなっている可能性はある。本計算法では、境界表面の流体力算出は容易であるが、流体内の流動状況（波＋浮体の非線形動揺の影響）を計算し、それをチェーンの運動計算にフィードバックすると計算の収束が難しいという問題がある。従って、流体内のチェーンに対する流体力を考慮した計算法の確立は、今後の課題であるといえる。

次に、実験で透過率の波高影響が現れた実機波周期 6.4s について、実機波高 1.25m, 2.50m, 3.75m の場合の透過率計算を実施した。図 5.3.13 に計算結果及び実験結果を示す。実験、計算ともに波高が大きくなるに従って透過率が増加している。線形の浮体応答計算では、波高によらず透過率一定の結果しか得られないことを考えれば、今回提案した浮体応答計算法は、透過率に対する波高の影響についても表現可能であることがわかる。

ただし、波周期 6.4s、実機波高 2.50m・3.75m の条件では実験にて越波が観測された。越波した水塊は浮き防波堤後部の水面へ再突入し、透過波高は増大する。今回提案した計算法では越波を扱うことが出来ないため、その他の諸元はそのままとし浮体側の乾舷を 0.115m に設定することで対応している（元々の乾舷は図 5.3.1 に示すように 0.04m）。従って、実験と計算では波高の増大に伴う透過率の増加のメカニズムが異なっており、その点に注意する必要がある。この越波の問題は、今回提案したようなラグランジュ的要素を用いる計算では困難であるため、越波を安定的に解ける計算法との連成手法（例えば曙ら<sup>4)</sup>）等を開発する必要がある、これも今後の課題である。

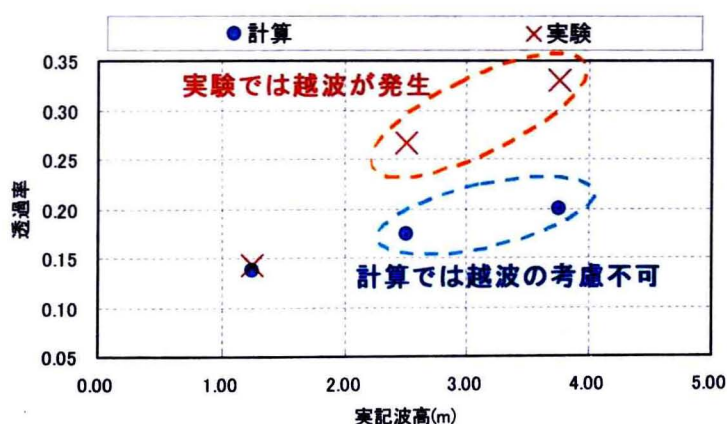


図 5.3.13 透過率の波高影響に関する実験・計算結果比較  
(実機波周期 6.4s, ばね係留)

ところで、波高による透過率の差が発生する越波以外の原因は、今回対象としている波高が浮体吃水に比して無視できない大きさであるためであると考えられる。図 5.3.14 に、実機波周期 6.4s の浮体応答の様子を示すが、波高が大きくなるにつれ浮体の吃水が大きく変動している。ここまでの吃水変動が生じると、浮体－水面の幾何学的関係を時刻歴によらず一定と仮定する線形計算（例えば大楠ら<sup>5)</sup>）では透過率が正しく評価できない。このような場合、水面－浮体の幾何学的関係をも変化させる非線形な計算手法が必要である。その意味では、今回提案した計算手法が大振幅な水面・浮体動揺に対しても有用であることが確認できたといえる。

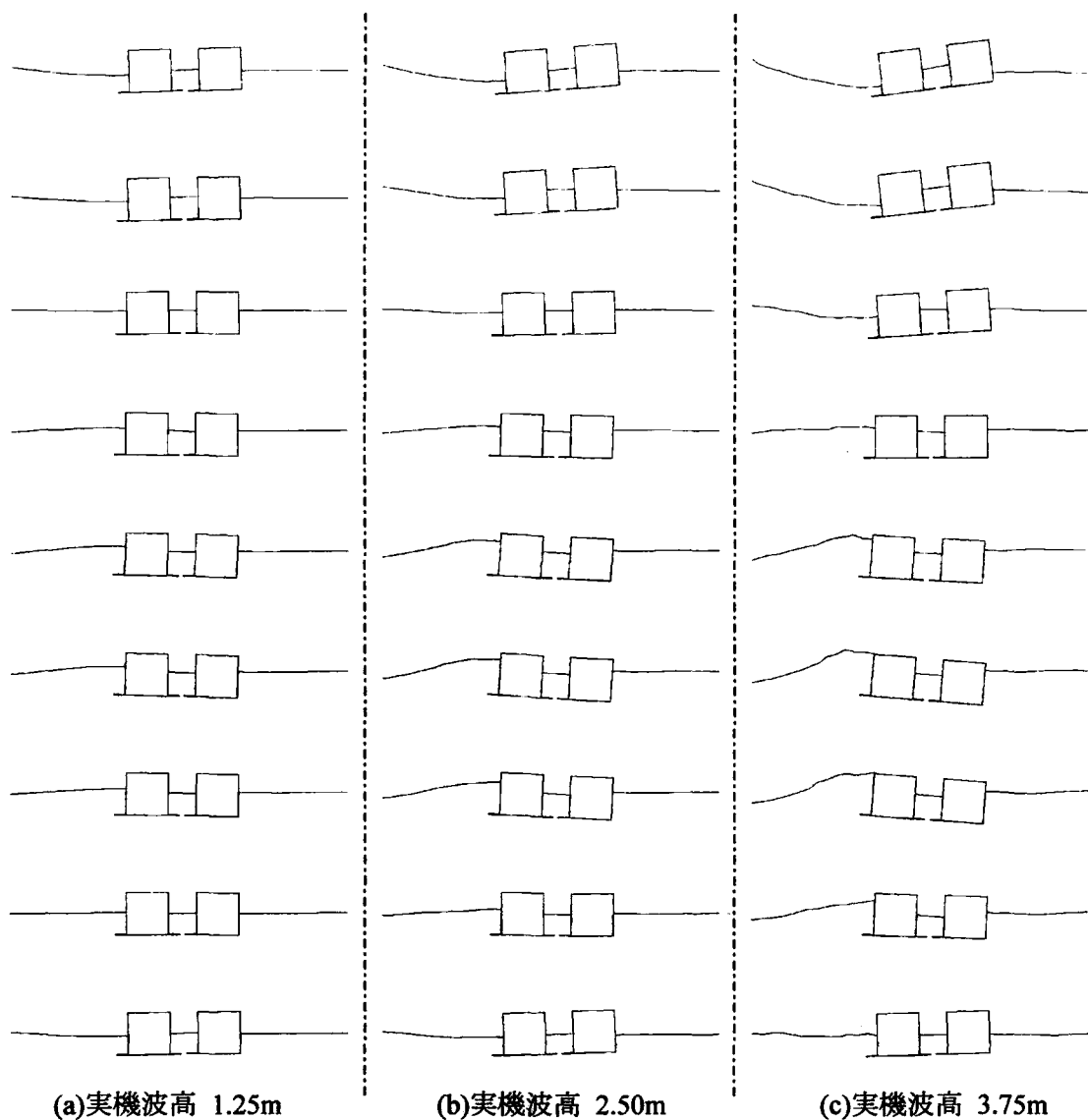


図 5.3.14 波高の大きさによる自由表面運動・浮体応答の違い（実機波周期 6.4s）



## 5. 4 結言

本章では、単純箱型に比べてより複雑な形状を有する浮体について、本論文の自由表面付流体－浮体の連成計算手法に関する適用性を検討した。検討では、2つの矩体から成り矩体間に中間水面が存在するツイン型浮防波堤を対象とした。以下にまとめを述べる。

- (1) 著者らが行ったツイン型浮防波堤の形状影響に関する実験との比較を実施し、本論文の計算手法の妥当性について検討を行った。検討の結果、ツイン型浮防波堤の形状影響について、本計算手法により実験結果の傾向を定性的、定量的に精度良く再現できることを確認した。これにより、中間水面の運動によって、浮体や外部流体の運動に影響が生じるような複雑形状の浮体に対しても、本計算手法が適用可能であることを示した。
- (2) チェーン係留を表現するための非線形計算モデル及びアルゴリズムを構築し、本論文の計算手法に組み込んだ。これについて、著者らが行ったツイン型浮防波堤の係留条件に関する実験と比較を行い、手法の妥当性を検討した。検討の結果、チェーン係留の場合がばね係留の場合に比べて透過率が低いという実験結果の傾向を、計算でも再現できることを確認した。これにより、本計算手法が非線形な構造計算との連成にも対応可能であることを示した。
- (3) 著者らが行ったツイン型浮防波堤の波高影響に関する実験との比較を実施し、線形計算では評価できない波高影響を、本論文の計算手法で再現できるかについて検討した。消波性能（透過率）に対する波高影響については、本論文の計算手法にて表現できたものの、定量値では実験との間に大きな乖離が見られた。これは、実験では越波が生じていたのに対し、本計算手法では越波を扱うことができないためである。この点については、越波をどう計算に取り込むかが今後の大きな技術的課題であるといえる。

## 参考文献

- 1) 池末俊一 田村一美 木原一禎 松浦正巳 太田真 杉泰広 高山知司(2003): ツイン型浮防波堤の波浪透過特性に関する実験と計算, 海岸工学論文集, vol.50, pp.666-670

- 2) 合田良実, 鈴木康正, 岸良安治, 菊池治(1976): 不規則波実験にける入反射波の分離測定法, 港湾技研資料, No.248, pp3-24
- 3) 元良誠三監修(1982): 船体と海洋構造物の運動学, 成山堂書店 : 362p
- 4) 曙光 山城賢 吉田明德 入江功(2003): BEM と VOF を結合した波動場解析, 海岸工学論文集, vol.50, pp.11-15
- 5) 大楠 丹・柏木 正・池上国広・尾崎雅彦・磯崎芳男(1991) : 内部自由水を利用する浮消波堤の消波性能に関する研究, 日本造船学会論文集 第 169 号, pp.215~222.

## 6. 結論

本論文では、自由表面付流体－浮体の連成計算手法として、BEM をベースとした時間領域計算法の構築を試みた。また、造波板加振やスロッシング等の計算を実施し、本手法による自由表面応答計算の妥当性を検証した。更に、「浮棧橋」及び「浮防波堤」の動揺特性評価や消波性能評価に関して、本論文で提案した浮体との連成計算手法の適用性を実験との比較により検証した。

第1章では、沿岸構造物分野における波力評価方法や浮体の取り扱いについて概要を説明した。また、「浮棧橋」や「浮防波堤」など対象波高が浮体吃水に比して無視できない浮体構造物に関する動揺評価・消波性能評価について問題点を整理し、本論文の方向性及び位置付けを明らかにした。

第2章では、BEM による自由表面付流体計算及び浮体との連成計算法について、基礎的事項及び計算テクニックを整理した。また、自由表面の時間発展計算には、時間発展精度及び流体体積保存性の向上を目的として、Newmark- $\beta$ 法を導入した新たな手法の提案を行い、定式化及び計算アルゴリズムを示した。これに加えて、自由表面上の速度ポテンシャルに関する時間発展式が移流方程式の形式であることに着目し、CIP法を導入した新たな手法を提案した。この手法を、Newmark- $\beta$ 法による自由表面の時間発展計算アルゴリズムに組み込むことで、時間発展精度だけでなく自由表面上の速度ポテンシャル差分に対する計算安定性の向上を図った。

第3章では、本論文にて提案した自由表面付流体計算手法について、計算手法の妥当性を検証した。まず、浮体の動揺を評価する意味でも移動壁に対する自由表面の応答は重要な要素となるため、造波板加振による水面応答計算を実施し理論及び既往実験との比較を行った。比較の結果、線形領域では計算が造波特性理論値と良好な一致を示し、非線形領域においても水面波形の遷移状態が計算と実験で良好に一致していることを確認した。

Newmark- $\beta$ 法の導入による時間発展精度の効果については、スロッシング計算による検証を行った。その結果、オイラー法では時間刻みにより水面応答結果に大きな差異が生じ

るのに対し、Newmark- $\beta$ 法では時間刻みによる水面応答結果の差異が小さく、本手法が時間発展精度の向上に効果のあることを示した。また、計算誤差の蓄積により精度良く計算することが難しいというの周期についても、本手法を用いることで精度良く計算可能なことが分かった。更に、オイラー法では時間刻みをタンク加振周期の  $1/320$  としても計算領域の体積が変動するのに対して、本手法ではタンク加振周期の  $1/80$  の時間刻みでも体積変動が発生せず、本手法が流体の体積保存性向上にも効果のあることを確認した。

CIP 法による自由表面ポテンシャル時間発展手法の効果に関しては、ダムブレイク問題による検証を行い、大きな自由表面運動を伴うような問題についても安定的に計算可能なことを確認した。

第4章では、著者らの浮体橋動揺低減技術に関する実験を題材として、本論文で提案した自由表面付流体—浮体の連成計算手法の検証を行った。まず、単純箱形浮体の動揺について実験値と比較を行い、本計算手法にて浮体応答値だけでなく、浮体の過渡応答についても精度良く評価可能なことを示した。

また、浮体との間に隙間を空けてフィン装着する MS-board を取付けた場合の計算については、フィンに作用する抗力の簡易モデルを考案し、本計算手法に導入した。この方法にて、剛支持型 MS-board の動揺低減特性がほぼ再現可能なことを、実験との比較により明らかにした。ヒンジ型 MS-board についてはピン連結された2剛体に関する計算を本計算手法に組み込み、ロールピーク値の低減特性などの評価には十分実用に耐えうる手法であることを示した。

第5章では、より複雑な浮体に関して、本論文で提案した自由表面—浮体の連成計算手法の検証を行った。検討では、2つの矩体から成り、矩体間に中間水面が存在するツイン型浮防波堤を対象とした。

ツイン型浮防波堤の形状影響については、本計算手法にて矩体間の中間水面の影響やフィンの影響等を定性的・定量的に精度良く評価可能なことを、実験との比較により示した。

また、チェーン運動に関する非線形計算法を、本計算手法に組み込み、係留条件の違いによる消波性能の差異を計算にて再現可能なことを示した。

消波性能に対する波高影響については、実験にて現れた波高影響を計算においても定性

的に再現できることを確認し、線形計算では評価が出来ない入射波高の影響を計算手法により考慮可能であることを明らかにした。

今後の課題としては、「砕波による崩れ自由表面の処理法」、「越波の処理法」が上げられる。まず、「砕波による崩れ自由表面の処理法」については、自由表面の曲率に応じた減衰項の付加処理が可能であるかを模索している。これは、速度ポテンシャルの時間発展式を以下のように表現するものである。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - Z - \nu \cdot \kappa \quad (6-1)$$

上式の右辺第3項が水面大変形時に速度ポテンシャルに対して減衰を与える項で、 $\kappa$ が曲率、 $\nu$ が減衰定数となっている。通常、砕波が発生した場合、水面波のエネルギーは砕波により逸散されて波高が小さくなる。従って、式(6-1)の右辺第3項は、この効果を模擬した数値計算上のテクニックといえる。この方法の試計算を行ったものについて、図 6.1 に示す。これは、斜板上を駆け上がる波を計算したもので、減衰係数 $\nu$ の値を 0.0035 とすることで計算が破綻せず続行できたときの結果である。このように、曲率に比例する減衰項を入れることで水面崩れによる不安定化を防ぐ効果は確認できている。今後は、減衰係数 $\nu$ の値・もしくは関数形をどのように設定すれば、実現象から乖離することなく合理的に自由表面運動を表現しうるかが検討課題であるといえる。

また、越波の表現については図 6-2 のようなアプローチが考えられる。ただし、このような方法を用いる際には、境界節点の配置、組み合わせが頻繁に変化するため計算が不安定化することは容易に想像できる。従って、これら境界節点配置、組み合わせのパターンに関する体系的整理や、それらの頻繁な変化に対応する計算技術がキー技術になる。もしくは、越波部分のみを VOF 法や MPS 法などに置き換える手法なども検討の余地があるものと思われる。

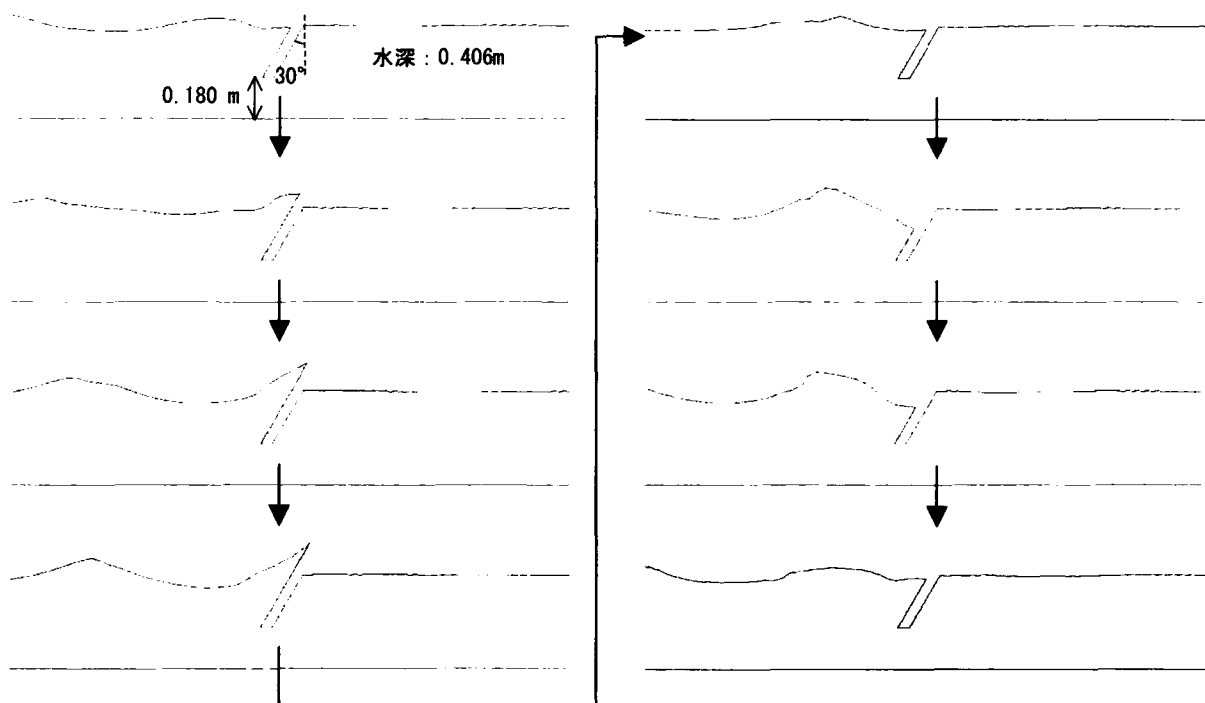


図 6.1 自由表面崩れ安定化手法の試計算(周期 0.8s, 波高 0.08m,  $\nu=0.0035$ )

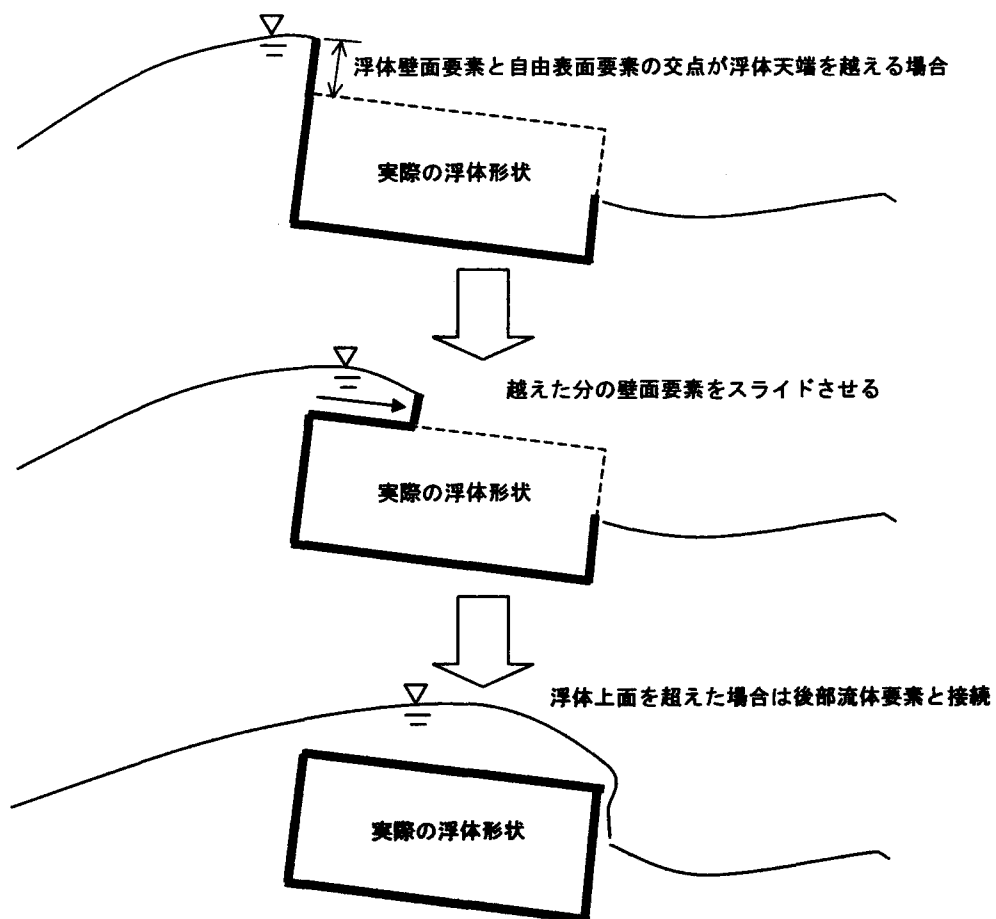


図 6.2 越波計算のイメージ

## 謝辞

京都大学防災研究所教授 高山知司先生には、平成8年から平成11年までの研究室在室中より、様々な面において多大なる御指導を賜りました。また、本論文をとりまとめるにあたっては、御多忙にも関わらず、様々な視点より適切かつ懇切丁寧な御指導、御助言を賜りました。心より感謝の意を表します。

京都大学大学院工学研究科 都市環境工学専攻 教授 酒井哲郎先生、社会基盤工学専攻 助教授 宇都宮智昭先生には、御多忙にも関わらず本論文の審査を引き受けて頂き、誠に有難うございました。

京都大学防災研究所助教授 間瀬肇先生には、研究室在室中のころより海岸・海域関連の解析技術に関して様々な情報を頂きました。特に、毎週開催のゼミにて取り上げていただいた移動境界流れ解析というテーマは、筆者が解析に興味を抱くきっかけとなりました。

國富将嗣先輩（現 国富株式会社総務部長）には、研究室在室中より公私にわたり御指導、御支援を頂きました。先輩の大変心強い励ましは、本論文の遂行にあたり大きな精神面での支えでありました。

京都大学防災研究所助手 安田誠宏先生には、本論文作成にあたり論文の書き方、進め方など様々な御指導を頂きました。また、日頃より海岸関連の最新技術について様々な情報を頂き、大変刺激を受けております。

防衛大学教授 瀬戸秀幸先生には、浮体と流体の連成問題について様々な御指導を頂きました。特に、筆者が本論文にて提案した計算法を構築する際、的確な御指摘を頂戴し、大変参考となりました。

三菱重工株式会社 広島研究所の熊本直樹氏（現 菱明技研在籍）、田村一美主幹及び長崎研究所の本田明弘主幹、佐藤敏浩室長には本論文を遂行する機会と多大なご援助を頂き

ました。また、広島研究所の井上幸一主席，平井潤主任及びリョーセンエンジニアリング株式会社の山本利弘次長には，技術面より多大なる御支援，御指導を頂きました。

その他にも研究室 OB や後輩の諸兄から，御協力，御支援を頂くことにより，本論文をまとめることができました。

最後に，妻 直子には，多大なる支援を頂いたこと心より感謝しております。本論文に取り組み始めた 2 年前は，長女美月が生まれて半年も経っていない頃でした。論文の作成は帰宅後と休日の時間でしたので，ただでさえ育児で孤軍奮闘中の妻に，非常な負担をかけました。今後は，これまで迷惑をかけた分，家事分担・育児分担で恩返しできればと考えております。